
Чисельне математичне дослідження напружено-деформованого стану залізобетонних плит із застосуванням високоміцного бетону та тришарового армування при дії епізодичного навантаження

Роман Гавришків

Кафедра будівельних конструкцій та мостів, Національний університет «Львівська політехніка», Україна

ORCID: 0009-0006-9631-0805

Анотація: У роботі виконано чисельне математичне моделювання напружено-деформованого стану кругової залізобетонної плити з тришаровим горизонтальним армуванням із високоміцного бетону класу C50/60 при дії квазістатичного навантаження інтенсивністю $q = 100 \text{ кН/м}^2$, що відповідає нормативному рівню аварійного епізодичного впливу за ДБН В.2.2-5:2023. Тривимірну скінченноелементну модель зварного арматурного каркасу реалізовано в ПК Lira-FEM із використанням нелінійних діаграм деформування бетону та сталі. Несуча здатність похилих перерізів на продавлювання визначена за вдосконаленою методикою з урахуванням нагельного ефекту горизонтальної арматури при кутах руйнування $\gamma = 34\text{--}40^\circ$, характерних для аварійних динамічних навантажень. За результатами моделювання встановлено, що максимальні дотичні напруження $\pm 23,8 \text{ МПа}$ концентруються в площині середньої сітки та в зоні опорного контуру, ідентифікуючи поверхню критичної тріщини продавлювання під кутом $30\text{--}34^\circ$. Напруження в нижній арматурі $\sigma_s = 92 \text{ МПа}$ не перевищують $f_{yd} = 335 \text{ МПа}$, максимальний прогин $0,32\text{--}0,34 \text{ мм}$ при відхиленні між двома схемами навантаження не більше 7% підтверджує жорсткість конструкції та коректність квазістатичного підходу. Нагельна складова тришарового армування у $8,5$ рази перевищує відповідний показник одношарової конфігурації, аналітична несуча здатність $F_{\max Rd} = 2\,525 \text{ кН}$ при $V_{Ed} = 38,5 \text{ кН}$. Навантаження тріщиноутворення становить 70% від розрахункового, що відповідає пружно-пластичному характеру деформування ВМБ. Отримані результати є основою для проведення натурних випробувань та вдосконалення нормативних положень щодо застосування високоміцного бетону в плитах перекриттів при дії епізодичних аварійних навантажень.

Ключові слова: аварійне навантаження; надлишковий тиск; залізобетонна плита; продавлювання; високоміцний бетон; нагельний ефект; деформаційний метод; тришарове армування; чисельне моделювання.

1. Вступ

Залізобетонні плити перекриттів є ключовими несучими елементами будівель і споруд, від надійності яких безпосередньо залежить цілісність конструктивної системи при дії різних навантажень, окрему особливу роль серед яких відіграють аварійні навантаження. Останній досвід обстеження каркасних будівель після аварійних пошкоджень оголив критичні проблеми конструювання та підходи до розрахунку відповідальних вузлів залізобетонних конструкцій. Виявлено ряд прогалин у нормах проектування плит перекриттів у спорудах подвійного або спеціального призначення, зокрема відсутність чітких настанов щодо розрахунку на продавлювання від епізодичних навантажень [1, 2].

Продавлювання є одним із найбільш небезпечних і раптових видів руйнування плит перекриттів, оскільки відбувається без явних попередніх ознак і супроводжується прогресуючим обваленням конструктивної системи. При дії аварійних епізодичних

навантажень кут критичної тріщини продавлювання суттєво зменшується — до 30–34° — порівняно з нормативним значенням 63,4° для статичних умов [4, 9], що визначає необхідність перегляду розрахункових схем і конструктивних заходів. Особливо актуальним це є для плит із тришаровим горизонтальним армуванням по висоті перерізу, де нагельний ефект середньої сітки може суттєво підвищити опір зоні продавлювання, однак цей механізм залишається недостатньо дослідженим у вітчизняній нормативній базі.

Застосування високоміцного бетону класів C50/60 і вище відкриває суттєві можливості для зменшення товщини перерізів та власної ваги конструкцій при збереженні необхідного рівня несучої здатності. Водночас він має специфічний характер деформування: за умови підвищеної міцності поверхня руйнування при продавлюванні проходить крізь зерна заповнювача, а не по їхньому контакті з цементним каменем, що знижує ефект агрегатного зачеплення та потребує коригування розрахункових залежностей [14]. Крім того, характеризується ранньою тріщиноутвореністю та значно більшою висотою стиснутої зони порівняно зі звичайним бетоном, що суттєво впливає на картину розподілу напружень по перерізу і є предметом окремого дослідження [3].

Незважаючи на значний масив наявних досліджень продавлювання залізобетонних плит у статичних умовах, питання поведінки плит із класу бетону C50/60 за умов тришарового горизонтального армування при дії аварійних навантажень залишаються недостатньо вивченими. Відсутність єдиного нормативного підходу до визначення розрахункового кута критичної тріщини продавлювання, врахування нагельного ефекту середнього шару арматури та особливостей деформування визначає науково-практичну актуальність даного дослідження та його спрямованість на заповнення зазначеної прогалини.

2. Об'єкт і предмет дослідження

Об'єктом дослідження є процес деформування та руйнування залізобетонної плити перекриття з тришаровим горизонтальним армуванням із високоміцного бетону класу C50/60 при дії аварійного навантаження. Виконане чисельно математичне моделювання в програмному комплексі Lira-FEM, який використовує метод скінченних елементів для побудови та розрахунку складних інженерно-наукових задач. Модель включає залізобетонну плиту кругової форми з тришаровим армуванням, де кожен шар сітки моделюється окремими стержневими елементами, що забезпечує можливість визначення напружень безпосередньо в арматурних включеннях.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан конструкції плити з тришаровим армуванням на продавлювання — розподіл напружень у бетоні та арматурі, деформована схема, а також вплив положення середньої сітки на загальну жорсткість системи при дії аварійного навантаження.

3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є визначення напружень у шарах арматури та бетону, дослідження впливу середньої сітки армування у залізобетонній плиті із високоміцного бетону та тришаровим армуванням при дії квазістатичного навантаження.

Для досягнення мети поставлено такі задачі: (1) Сформувати числову математичну модель деформування плити; (2) Провести розрахунок поведінки плити під дією імпульсного навантаження; (3) Провести оцінку напружено-деформованого стану, несучу здатність плити та надати рекомендації щодо впровадження отриманих результатів.

4. Аналіз літератури

Проблема продавлювання залізобетонних плит при дії зосереджених та інтенсивних рівномірно розподілених навантажень залишається однією з ключових у теорії залізобетону. Незважаючи на значну кількість накопичених досліджень, питання поведінки плит із високоміцного бетону за умов тришарового армування при дії аварійних епізодичних навантажень залишаються недостатньо вивченими, що зумовлює актуальність даного дослідження.

Фундаментальний внесок у розвиток теорії продавлювання залізобетонних плит без поперечного армування зробив Muttoni A. [14], який запропонував теорію критичної зсувної тріщини. Відповідно до цієї теорії, несуча здатність плити на продавлювання є функцією деформацій у зоні критичної тріщини та розміру крупного заповнювача в бетоні. Встановлено, що зі збільшенням розміру зерна заповнювача зростає інтенсивність агрегатного зачеплення вздовж поверхні тріщини, що підвищує опір зсуву. Водночас при застосуванні високоміцного бетону поверхня руйнування проходить крізь зерна заповнювача, а не по їхньому контакту з цементним каменем, що суттєво знижує ефект зачеплення і потребує розробки сучасних підходів до розрахунку на продавлення. Подальший розвиток теорії критичної тріщини та її систематизація відображені у виданні fib Bulletin 81 [10], де узагальнено результати досліджень продавлювання конструктивних залізобетонних плит із різними конфігураціями армування та різними класами бетону. У ньому підкреслюється, що при підвищеній міцності бетону кут нахилу поверхні руйнування при продавлюванні стає гострішим — у діапазоні $30\text{--}35^\circ$, тоді як для звичайних класів бетону він варіюється до $30\text{--}45^\circ$ залежно від геометрії плити та рівня навантаження. Цей факт є визначальним для коректного прийняття розрахункової схеми при дії аварійних навантажень.

Sagaseta J. та ін. [9] адаптували підхід теорії критичної тріщини для аналізу локальних пошкоджень залізобетонних плит і панелей при дії імпульсних навантажень. Авторами встановлено, що при короткочасному інтенсивному навантаженні, зокрема при динамічній взаємодії ударної хвилі з поверхнею конструкції, кут руйнування суттєво зменшується порівняно зі статичним і досягає межі у $30\text{--}34^\circ$ залежно від жорсткості плити та характеру навантаження. Розроблена авторами модель максимального зусилля продавлювання враховує рівновагу між тиском і силами інерції в момент локального руйнування, що якісно відрізняє її від статичних підходів визначення периметру продавлення.

Liu S. та ін. [6] дослідили чисельними методами пробивне руйнування залізобетонних плит при дії близько розташованого аварійного навантаження. З використанням критерію подвійного дотичного напруження, авторами побудовано розрахункову модель, що дозволяє визначати як критичне навантаження продавлювання, так і радіус зсуву. Верифікація на чотирьох незалежних серіях фізичних випробувань підтвердила точність методу — відхилення становило $5\text{--}20\%$. Принципово важливим є вплив масштабованої відстані від джерела навантаження та товщини плити на кут і характер поверхні руйнування.

Wang W. та ін. [13] провели серію масштабних випробувань односторонніх квадратних залізобетонних плит, зафіксувавши трансформацію характеру руйнування — від загального згинального до локального продавлювання — зі збільшенням інтенсивності та зосередженості навантаження. За результатами випробувань побудовано дві емпіричні формули, що враховують масштабний фактор та можуть бути використані для оцінки ступеня пошкодження при аварійних впливах.

Застосування високоміцного бетону у згинальних залізобетонних елементах присвячена робота Куцик О.В. та Журавського О.Д. [3]. Авторами досліджено три серії балок із бетонів класів C20/25, C50/60 та C65/80 при однаковому армуванні. Встановлено, що деформаційний метод, реалізований через криві «момент–кривизна» відповідно до ДСТУ Б В.2.6-156:2010 [8] та EN 1992-1-1 [7], забезпечує точність розрахунку до 10% для ВМБ. Характерною особливістю виявилась рання тріщиноутвореність у зразках із ВМБ — тріщини виникають на 31% раніше порівняно зі звичайним бетоном. Це пояснюється більш крихким характером деформування та меншим розміром зони пластичності. Водночас руйнівне навантаження для

зразків із високоміцного бетону виявилось на 21 % вищим, ніж для класу C20/25, що підтверджує доцільність застосування ВМБ у відповідальних конструкціях. На практиці застосування ВМБ узгоджується з положеннями посібника з проектування залізобетонних конструкцій [15], де деформаційний метод є одним із основних інструментів для нелінійного аналізу поведінки елементів у стадії граничного стану.

Кархут І.І. [4] у докторській дисертації вдосконалив методика розрахунку залізобетонних захисних конструкцій на аварійне продавлювання від дії зосередженого імпульсного навантаження. Ключовим науковим результатом є встановлення кута руйнування при динамічному навантаженні в діапазоні 34–40°, що показує прямі зміни характеру деформування бетону при підвищених швидкостях прикладення навантаження. У дисертації експериментально підтверджено, що при горизонтальному тришаровому армуванні по висоті перерізу нагельний ефект середньої сітки додає підвищенні характеристики тріщиностійкості зони продавлювання на 25–45% порівняно з одношаровим армуванням. Конструктивна вимога, встановлена за результатами досліджень, — не менше трьох стержнів горизонтальних сіток у кожному напрямку в зоні продавлювання — виявилась важливішою за загальну площу перерізу арматури: зразки з трьома стержнями Ø12 мм (крок 125 мм) продемонстрували вищу тріщиностійкість, ніж зразки з двома стержнями Ø16 мм (крок 150 мм).

Mikhailovskyi D.V., Skliarov I.O. та Komar O.A. [5] виконали систематичний аналіз семи інженерно-аналітичних методик визначення параметрів ударної хвилі при аварійних впливах. Авторами встановлено, що при однакових вихідних даних результати різних методик можуть відрізнятися у 2 рази за надлишковим тиском і до 5 разів за питомим імпульсом. Важливим для розрахунку горизонтальних плит є відбитий тиск, який, як правило, у 6 разів перевищує надлишковий тиск на фронті хвилі і саме це є важливим при оцінці дії аварійного навантаження на перекриття. Схожі спостереження наведено у класичній монографії Kinney G.F. та Graham K.J. [11], де систематизовано закономірності формування та загасання ударних хвиль залежно від потужності та типу заряду, а також обґрунтовано необхідність врахування відбитої складової тиску при взаємодії хвилі з перешкодою.

Koliakova V. та ін. [12] дослідили напружено-деформований стан конструкцій під дією повітряної ударної хвилі і підтвердили визначальну роль типу та схеми армування в забезпеченні цілісності конструкції при аварійних навантаженнях. Нормативи для вибору конструктивних параметрів конструкцій споруд та призначення мінімального армування закладено в ДБН В.2.2-5:2023 [1], а також підходи до розрахунку конструкцій при дії факторів ураження засобів повітряного нападу детально розглянуто у монографії Михайловського Д.В. та ін. [2].

Аналіз наукових праць, попри значний об'єм досліджень продавлювання залізобетонних плит у статичних умовах, питання поведінки плит із високоміцних класів бетону при тришаровому горизонтальному армуванні за умов аварійних епізодичних навантажень довів актуальність даного дослідження та відсутність об'ємного матеріалу, яке базується на попередніх підходах з визначення напружено-деформованого стану при продавленні плит з високоміцного бетону та тришаровим армуванням. Відсутність єдиного нормативу, який чітко регламентує підходи до визначення розрахункового кута критичної тріщини продавлювання, розміщення арматурних сіток, також необхідність врахування нагельного ефекту розподіленого горизонтального армування та крупності заповнювача в бетонній суміші, визначають напрям та зміст даного дослідження.

5. Методи досліджень

Прямі рекомендації щодо вибору класу бетону та висоти плити прийнято з ДБН В.2.2-5:2023 [1] таблиця 14.15, а також прийнято мінімальне армування та кількість шарів арматури. Відповідно до п. 14.4 ДБН В.2.2-5:2023, розрахункове навантаження на плиту від ударної хвилі приймається, як еквівалентне квазістатичне навантаження:

$$q_{\text{вх.ев}} = P_1 \times K_d, \quad (1)$$

де $P_1 = \Delta P_{\text{ex}}$, кПа — визначальний тиск на конструкції за таблицею 14.1 [1];

ΔP_{ex} — середнє значення тиск на конструкцію, кПа;

K_d — коефіцієнт динамічності, що враховує характер прикладання навантаження та тривалість фази стиснення.

Значення величини навантаження за (1) на плиту перекриття із застосуванням коефіцієнта динамічності, моделює поведінку плит в статичній постановці задачі, без прямого динамічного методу, який вимагає більших затрат потужностей обчислювальних систем та більше часу для проведення чисельного моделювання.

Надлишковий тиск на фронті ударної хвилі визначається за емпіричною формулою (2) М.О. Садовського [5] для визначення навантаження від епізодичної дії в повітрі:

$$\Delta p_s = \frac{0.084}{R} + \frac{0.27}{R^2} + \frac{0.7}{R^3}, \text{ (МПа)} \quad (2)$$

де $R = \frac{R_{\text{geom}}}{\sqrt[3]{m_{\text{ef}}}}$ — масштабована відстань, $\frac{\text{м}}{\text{кг}^{(1/3)}}$;

R_{geom} — відстань від епіцентру вибуху до конструкції, м;

m_{ef} — ефективна маса заряду в тротиловому еквіваленті, кг.

У дослідження [5], чітко наведені різні сценарії прикладання навантаження, оскільки це критично впливає на відбиття конструкцією надлишкового тиску, тому він наводить декілька сценаріїв події, вирази для визначення навантажень під кожен з цих сценарії окремо за (2) та (3).

Автор виділяє підхід до обчислення навантаження від прямої детонації на поверхні конструкції:

$$\Delta p_s = \frac{0.095}{R} + \frac{0.39}{R^2} + \frac{1.3}{R^3}, \text{ (МПа)} \quad (3)$$

де $R = \frac{R_{\text{geom}}}{\sqrt[3]{m_{\text{ef}}}}$ — масштабована відстань, $\frac{\text{м}}{\text{кг}^{(1/3)}}$;

R_{geom} — відстань від епіцентру вибуху до конструкції, м;

m_{ef} — ефективна маса заряду в тротиловому еквіваленті, кг.

Тривалість фази стиснення визначають за (4) та питомий імпульс для повітряної дії описують за формулою (5):

$$\tau_+ = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt[3]{m_{\text{ef}}} \cdot \sqrt{R}, \text{ (с)} \quad (4)$$

$$i_+ = 126 \cdot \frac{\sqrt[3]{m_{\text{ef}}^2}}{R}, \text{ (Па} \cdot \text{с)} \quad (5)$$

де $R = \frac{R_{\text{geom}}}{\sqrt[3]{m_{\text{ef}}}}$ — масштабована відстань, $\frac{\text{м}}{\text{кг}^{(1/3)}}$;

R_{geom} — відстань від епіцентру вибуху до конструкції, м;

m_{ef} — ефективна маса заряду в тротиловому еквіваленті, кг.

i^+ — питомий імпульс, Па · с.

τ_+ — тривалість фази стиснення, с.

Тривалість фази стиснення дає змогу визначити при динамічному розрахунку конструкцій, оскільки визначає, чи діє навантаження у квазістатичному, імпульсному чи динамічному режимі.

Відбитий тиск від хвилі для розрахунку горизонтальних перекриттів, при перпендикулярному падінні хвилі на поверхню та частці прорізів у плиті менше 10 %:

$$p_r = p_f + \frac{6p_f^2}{(p_f + 0.72)}, \text{ (МПа)} \quad (6)$$

де p_f — надлишковий тиск на фронті хвилі, МПа.

Формула (6) застосовується при суцільних перекриттях, наприклад : підземних паркінгів та споруд подвійного призначення за класифікацією згідно норм [1]. За результатами порівняльного аналізу методик [5], для практичних розрахунків захисних споруд рекомендується застосовувати підхід Kingery–Bulmash, який забезпечує більш точний результат у широкому діапазоні масштабованих відстаней. Значення відбитого тиску, як правило, у 4–6 разів перевищує надлишковий тиск на фронті хвилі, що дуже важливо при розрахунку горизонтальних плит перекриття за формулою (6).

Для підтвердження відповідності визначеного розрахункового навантаження за (1), реальним аварійним впливам виконано верифікаційний розрахунок. За сценарій прийнято епізодичний вплив в повітрі з еквівалентом $m_{ef} = 34\text{кг}$ згідно даних наведених у [2]. З формули (2) при нормативному значенні надлишкового тиску $\Delta p_s = 0,1\text{МПа}$ масштабована відстань становить $R = 2,7 \frac{\text{м}}{\text{кг}^{(1/3)}}$, що відповідає відстані від епіцентру до поверхні перекриття $R_{geom} = 8,7\text{м}$, та тривалість стиснення за (4) складає $\tau = 0,01\text{с}$. Таким чином, прийнятий розрахунковий рівень навантаження $q = 100\text{ кН/м}^2$, для споруд І класу, відповідає фізично обґрунтованому сценарію аварійного епізодичного навантаження від типової загрози на нормативній відстані від конструкції, та коректного застосування квазістатичного підходу з коефіцієнтом динамічності $K_d = 1,0$.

Проектування згинальних елементів із високоміцного бетону описаний у дослідженнях [3], закладається у визначенні кривих кривизни по деформаційному методу, що відповідає нормам ДСТУ Б В.2.6-156:2010 та EN 1992-1-1, дозволяє з достатньою точністю описати поведінку згинальних залізобетонних елементів з через криві «момент–кривизна» [3]. Рівняння рівноваги по осі та моментів мають вигляд:

$$\frac{bf_{cd}}{\bar{\kappa}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \gamma^{k+1} + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{bf_{cd}}{\bar{\kappa}^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \gamma^{k+2} + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} (x_1 - z_{si}) - M = 0, \quad (8)$$

де b — ширина перерізу, м;

f_{cd} — розрахунковий опір бетону на стиск, МПа;

$\bar{\kappa}$ — відносна кривизна;

a_k — коефіцієнти полінома діаграми деформування бетону;

$\gamma = \epsilon_{s(1)}/\epsilon_{s1}$ — відношення відносних деформацій стиску до граничних;

σ_{si} — напруження в i -му стержні арматури, МПа;

A_{si} — площа перерізу i -го стержня, м^2 ;

x_1 — висота стиснутої зони, м;

z_{si} — відстань від центра ваги арматури до стиснутої грані.

Кривизна вигнутої осі перерізу та відносна кривизна для згинаних елементів з високоміцного бетону визначають за формулами (9) та формулою (10) :

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2}}{h} = \frac{1}{r}, \quad (9)$$

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\varepsilon_{c1}}, \quad (10)$$

де h — висота перерізу, см;

ε_{c1} — деформацій в стиснутій зоні бетону;

ε_{c2} — деформацій в розтягнутій зоні бетону.

Система рівнянь (7)–(10) описує деформаційний метод розрахунку несучої здатності залізобетонного перерізу, що базується на гіпотезі плоских перерізів і нелінійній діаграмі деформування бетону, апроксимованій поліномом п'ятого степеня з коефіцієнтами a_k , та дає змогу визначити несучу здатність взірців з високоміцного бетону класу C50/60.

Порівняльні дослідження [3] показали, що несуча здатність із високоміцного бетону класу C50/60 на 21 % вища за відповідний показник для звичайного бетону класу C20/25 при однаковому армуванні, проте характерною особливістю ВМБ є рання тріщиноутвореність їх розкриття значно менш інтенсивне, тому числову математичну модель розроблено з бетону класу C50/60.

Для захисних конструкцій покриттів з горизонтальним тришаровим армуванням несуча здатність похилих перерізів на продавлювання від аварійного динамічного навантаження визначається за вдосконаленою залежністю [4]:

$$F_{\max Rd} = F_v \cdot \cos \gamma + F_{hsw} + F_n \cdot \sin \gamma, \quad (11)$$

де $F_v = 2k_d \cdot f_{ctm} \cdot A \cdot \operatorname{ctg} \gamma$ — дотична складова міцності бетону;

$F_n = k_d \cdot f_{ctm} \cdot A$ — нормальна складова сили;

A — площа поверхні продавлення, см^2 ;

f_{ctm} — середня міцність бетону на розтяг, МПа;

$F_{hsw} = 0,576 \cdot m \cdot \sqrt{f_{yd} \cdot g_1 \cdot \emptyset^3}$ — зусилля нагельного ефекту;

$k_d = 1 + 0,07 \cdot l g_v$ — коефіцієнт динамічності;

f_{yd} — міцність арматурних стержнів на розтяг, МПа;

v — швидкість навантаження, $\text{кН/м}^2 \cdot \text{с}$;

$\emptyset$ — діаметр арматурного стержня, см;

γ — кут руйнування: при аварійних динамічних навантаженнях $\gamma = 34\text{--}40^\circ$.

Формула (11) визначає несучу здатність похилого перерізу залізобетонної плити при продавлюванні від аварійного динамічного навантаження з урахуванням нагельного ефекту, як суму трьох складових, що діють на похилій поверхні руйнування конструкції.

Розрахункові моменти в стержнях горизонтальних сіток при розколюванні бетону визначають з умови нагельного ефекту:

$$M_{\max} = 0,166 \cdot \emptyset^3 \cdot f_{yd}, (\text{кН} \cdot \text{м}), \quad (12)$$

При цьому несуча здатність стержня по нагельному ефекту в точці максимального тиску на бетон:

$$V_{max} = 0,576 \cdot \sqrt{f_{yd} \cdot g_1 \cdot \Phi^3}, (\text{кН}) \quad (13)$$

Формула (12) визначає максимальний згинальний момент у горизонтальному арматурному стержні в зоні продавлювання, що виникає внаслідок нагельного ефекту поперечного опору стержня зсуву шарів бетону. Момент M_{max} виражений через діаметр Φ^3 арматури та розрахунковий опір сталі f_{yd} , що описує геометричну нелінійність задачі, де несуча здатність на нагельний ефект зростає пропорційно.

Конструкція числової математичної моделі представляє круглу залізобетонну плиту діаметром 700 мм, з висотою перерізу $h = 250$ мм. Клас бетону — C50/60 ($f_{cd} = 33,3$ МПа; $f_{ctm} = 4,1$ МПа). Арматура класу A500C, $f_{yd} = 335$ МПа.

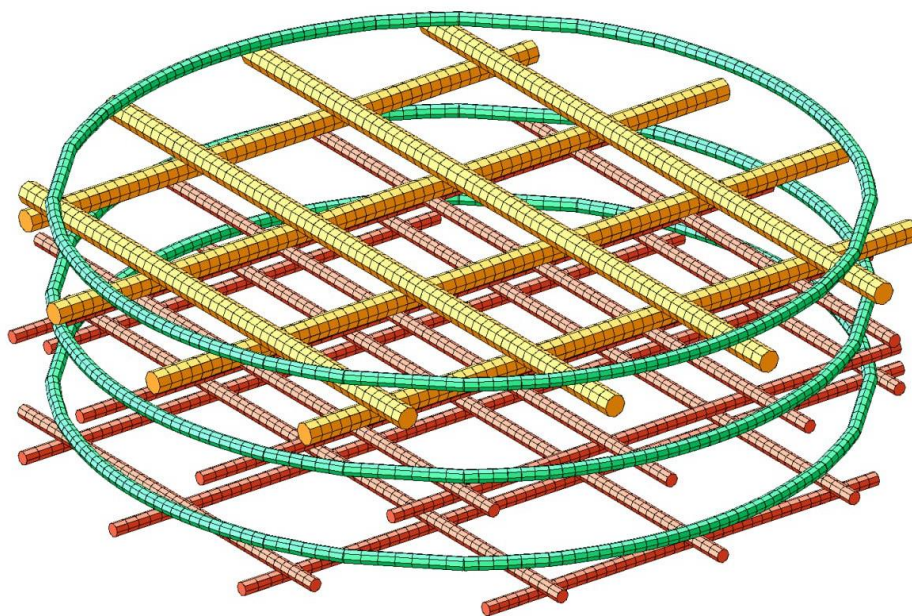


Рис 1. Моделювання зварного арматурного каркасу.

Тривимірну скінчено-елементну модель зварного арматурного каркасу круглої залізобетонної плити діаметром 700 мм із тришаровим горизонтальним армуванням у ПК Lira-FEM: нижній шар — стержні Ø12 мм, відповідає стиснутій зоні візрця, середній стержні Ø12 мм, та верхній Ø20 мм. у розтягнутій зоні. Кожен шар армування змодельовано окремими скінченними елементами, пов'язаними з об'ємними елементами бетону через спільні вузли, що забезпечує коректне відображення напружено-деформованого стану безпосередньо на контакті арматури з бетоном. Рівномірне розміщення середньої сітки по висоті перерізу є ключовим конструктивним рішенням, оскільки саме цей шар реалізує нагельний ефект і підвищує опір похилих перерізів у зоні продавлювання. Точність відтворення геометрії каркасу безпосередньо впливає на достовірність розподілу напружень між шарами арматури, отриманого в результаті чисельного розрахунку. Для обчислень були визначені наступні значення закону нелінійного деформування матеріалу, для арматури класу A500C, що зображено на рисунку 2:

Закони нелінійного деформування матеріалів

Основний матеріал

Закон нелінійного деформування
14 - кусочно-лінійний закон деформування

№ запису 1 Новий Копіювати Видалити

Коментар

Завантажити закон із файлу

Параметри закону нелінійного деформування

Деформація	Напруження
-0.02	-50000
-0.0025	-50000
0.0025	50000
0.02	50000

Намалювати

$\sigma - \text{Т/М}^2$

Метод розвантаж 1

Зберегти закон у файл

☒ Поточний закон ☐ Усі закони проекту

Підтвердити Скасувати

☐ Теорії міцності (для СЕ пластин)

Рис 2. Числові значення залежності напруження та деформації для арматури класу А500С.

Також для проведення числового математичного моделювання використовувався закон нелінійного деформування бетону для класу С50/60 з даними наведеними на рисунку 3:

Закони нелінійного деформування матеріалів

Основний матеріал

Закон нелінійного деформування
12 - криволінійний закон деформування бетону (

№ запису 1 Новий Копіювати Видалити

Коментар

Завантажити закон із файлу

Параметри закону нелінійного деформування

Параметри	Значення	Т/М ²
Ecm(-)	3.9769e+06	Т/М ²
Ectm(+)	3.9769e+06	Т/М ²
fcm(-)	-6934.1	Т/М ²
fctm(+)	448.7	Т/М ²
Epsc(-)	-0.003	
Epsc(-)	-0.0026	
Epsctu(+)	0.00023	

Намалювати

Метод розвантаж 1

Зберегти закон у файл

☒ Поточний закон ☐ Усі закони проекту

Підтвердити Скасувати Довідка

☐ Враховувати армуючий матеріал

☐ Враховувати повзучість бетону

☐ Теорії міцності (для СЕ пластин)

Рис 3. Числові значення залежності напруження та деформації для бетону класу С50/60

Для розрахунку було прийнято використовувати криволінійний закон деформування бетону за [7], оскільки він краще відображає залежності описану в роботі [3], та згідно формул (7)-(10).

6. Результати досліджень

Результати дослідження базуються на порівняльному розрахунку аналітичної тривимірної моделі залізобетонної плити кругової форми на дію епізодичного рівномірно прикладеного квазістатичного навантаження, що визначається за формулою (1). Відповідно до таблиці 14.1 ДБН В.2.2-5:2023 для захисних споруд $\Delta P_1 = 0,1$ МПа (100 кН/м^2).

Просторове моделювання арматурних включень у тілі бетонної конструкції в програмі Lira-FEM та рівномірне згущення скінченних елементів по висоті перерізу й навколо стержнів арматурних включень дозволило досягти рівномірного розподілу напружень і порівняти їхні параметри на контакті з бетоном у трьох шарах армування. Для верифікації моделі паралельно було прикладено рівнодіючу зосереджену силу у центральний вузол, досягнуто відхилення по максимальних переміщеннях між двома схемами, рисунок 6, навантаження не перевищило 7 %, що свідчить про коректність квазістатичного підходу.

Продавлювальна сила прикладалась перпендикулярно до поверхні зразка на площі круга опори діаметром 16см., для досягання необхідних кутів продавлення $\gamma = 34-40^\circ$. Для коректного моделювання защемленої по контуру плити, по периметру зрізця виконано закріплення переміщення вузлів по вертикальній осі. Прикладалося навантаження з кроком 10% від руйнівного визначеного по формулі (1) з коефіцієнтом динамічності.

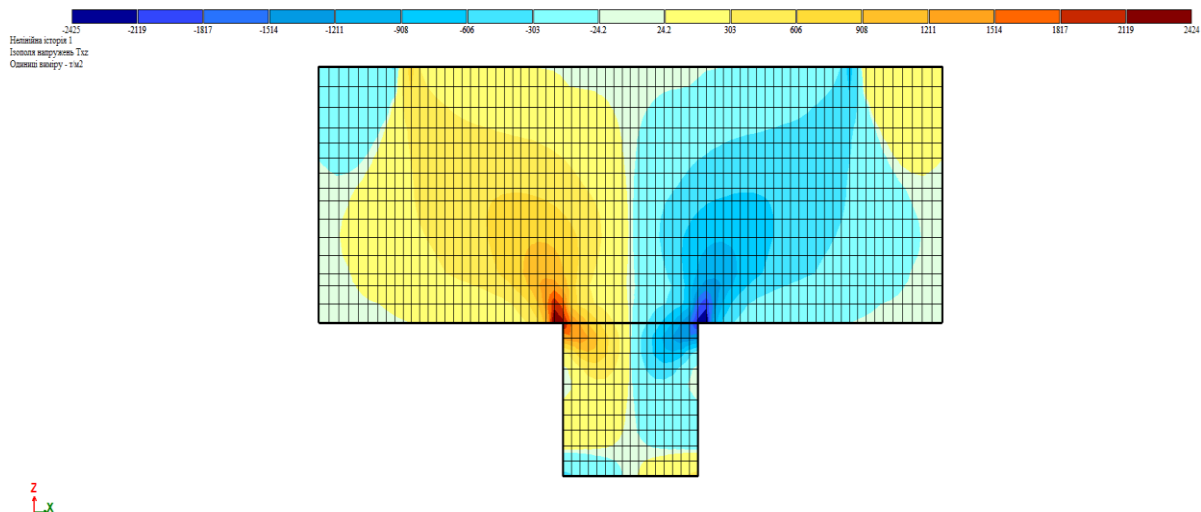


Рис.4 Ізополя розподілу напружень в приопорній зоні під кутом продавлення 30-34градуси .

На рисунку 4 розподіл дотичних напружень τ_{xz} демонструє концентрацію зусиль зсуву в зоні опорного контуру, що відповідає кутам пробиття, які описані [4] і [10] про механізм продавлювання при аварійному навантаженні під гострими кутами 30-34°. Чергування зон із протилежними знаками дотичних напружень відображає складний просторовий характер напруженого стану, особливо виразно це проявляється на ділянці переходу плити до опорного циліндра, де виникає інтенсивне перерозподілення зусиль.

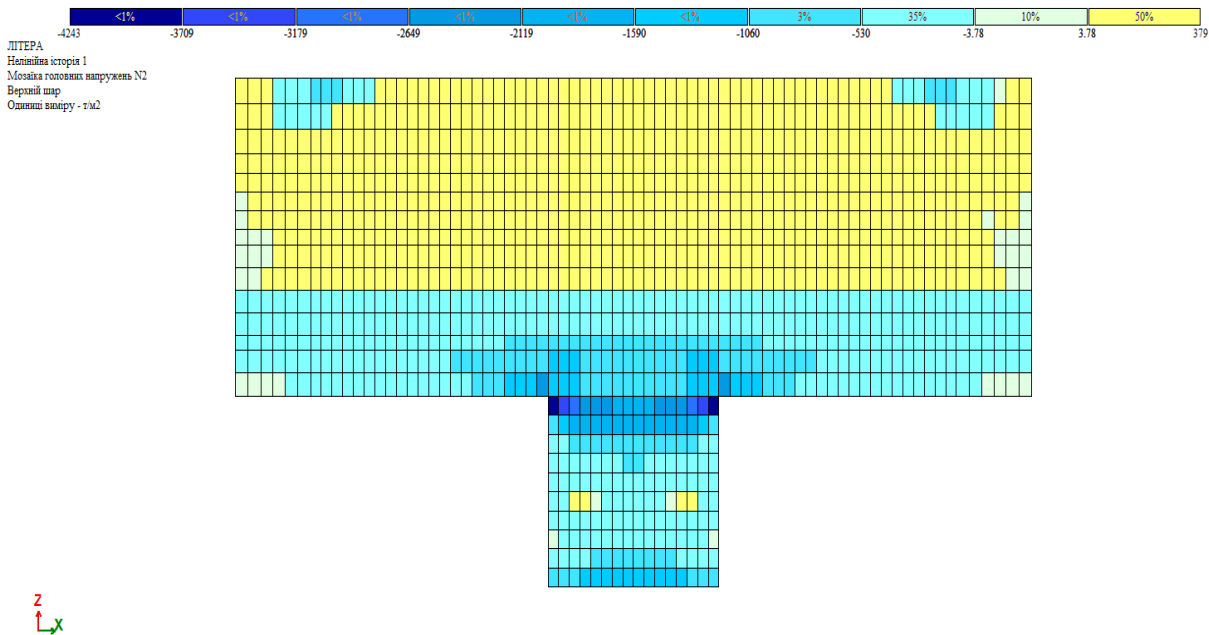


Рис.5 Ізополя розподілу напружень в розтягнутій зоні взірця .

Мозаїка головних стискаючих напружень N2 верхнього шару плити на рисунку 5, відображає характер стиснення під нижньою опорою від аварійного навантаження та локалізацію зон із найвищим рівнем напружень. Зона максимальних стискаючих напружень досягає сплеску приопорній зоні, де локалізована над опорним контуром, а напруження перевищують розрахунковий опір бетону $f_{cd} = 33,3$ МПа. Центральна частина плити зазнає розтягу до $+3,7$ МПа, що відповідає класичній схемі продавлення плити над колоною.

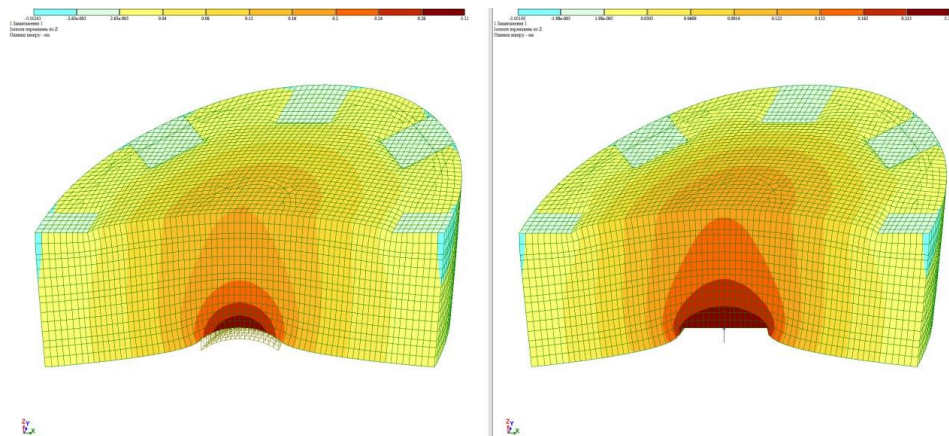


Рис. 6 Значення ізополів переміщень від прикладання сили.

Рисунок 6, подано результати збіжності переміщень, двох паралельних розрахункових схем, із метою верифікації квазістатичного підходу до моделювання аварійного навантаження: збіг характеру деформованої схеми при різних способах прикладання навантаження підтверджує коректність обраної моделі. Максимальний прогин плити при рівномірно розподіленому навантаженні становить $f_{max} = 0,32$ мм, при зосередженій силі — $0,344$ мм; відхилення між двома схемами не перевищує 7 %, що є коректним для науково-інженерних розрахунків і підтверджує незначний вплив форми епюри навантаження на загальну жорсткість системи. Характерна деформована схема з максимальним прогином у центральній зоні та практично нульовими переміщеннями по опорному периметру відповідає теоретичній моделі плити, защемленої по контуру. Величина абсолютних переміщень підтверджує достатню жорсткість плити із бетону класу C50/60 при заданому рівні навантаження.

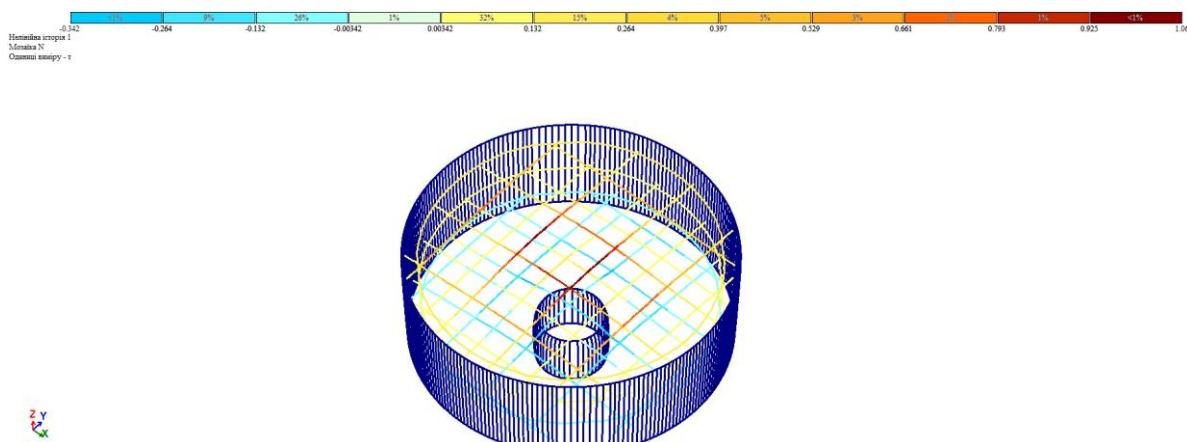


Рис.7 Значення напружень у сітках арматури.

На рисунку 7 відображено просторовий розподіл осьових зусиль у стержнях трьох шарів армування, що дозволяє безпосередньо оцінити рівень напружень у кожному елементі арматурного каркасу та перевірити умову забезпечення несучої здатності стержня за формулою (13). Максимальне розтягувальне зусилля в стержні Ø12 мм нижньої сітки досягає $N_{\max} = 1,06$ т., Кільцеві стержні обв'язки теж включається в спільну роботу каркасу, та передають напруження в бетону через спільні вузли в зоні стиску, що підтверджує конструктивні вимоги описані в дослідженні [4], прийнятої схеми роботи конструкції. Найвищі зусилля концентруються в центральній частині верхньої сітки вздовж двох взаємно перпендикулярних напрямів головних моментів $N_{\max} = 2,4$ т.

Отримані значення є вихідними даними для визначення нагельного ефекту середньої сітки за формулами (11)–(13) та підтвердили доцільність тришарової схеми армування для забезпечення рівномірного перерозподілу зусиль між шарами. Зведені результати розрахунку напружено-деформованого стану плити при навантаженні $q = 100$ кН/м² наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Результати розрахунку НДС плити

Параметри	Нижня сітка	Середня	Верхня сітка	Бетон
Нормативні напруження σ , МПа	+3,7	+0,5	-41,6	-33,8
Дотичні напруження τ , МПа	±8,6	±23,8	±14,2	±23,8
Переміщення, мм	0,3	0,2	0,08	0,34

Таблиця 1 узагальнює ключові результати чисельного розрахунку НДС плити і дозволяє порівняти рівень напружень у кожному з трьох шарів армування та в бетонному тілі в зоні продавлювання. Максимальні дотичні напруження зафіксовано в площині середньої сітки та в приопорній зоні контакту бетону, що підтверджує визначальну роль нагельного ефекту горизонтальної арматури, описаного формулами (12)–(13). Нормальні напруження в нижній арматурі не перевищують розрахункового опору $f_{yd} = 335$ МПа, це свідчить про пружну стадію роботи стержня, що вказує на наявність запасу несучої здатності конструкції. Максимальний прогин плити 0,32–0,34 мм при критичному навантаженні 100 кН/м² підтверджує достатню жорсткість конструктивного рішення, а незначна різниця між двома схемами прикладання навантаження показують коректність квазістатичного підходу.

Розрахунок за формулою (13) Кархута [4] для прийнятого взірця дає $F_{\max Rd} = 2525$ кН при розрахунковому зусиллі $V_{Ed} = 38.5$ кН— коефіцієнт запасу становить <1.5 , що узгоджується з пружним характером деформування за даними числового моделювання. Для верифікації методики: при застосуванні формули (13) до зразків Кархута з одношаровим армуванням, де автор отримав $F_{\max Rd} = 889$ кН із відхиленням від експериментальних значень руйнівного навантаження 13 % [4]. Таким чином, результати чисельної моделі та аналітичного

розрахунку є взаємно узгодженими: зона концентрації дотичних напружень у FEM відповідає розрахунковій поверхні продавлювання у формулі (13).

За результатами нелінійного розрахунку в ПК Lira-FEM із покроковим збільшенням навантаження встановлено, що перші тріщини в розтягнутій зоні бетону верхньої грані плити виникають на сьомій ітерації, якій відповідає рівень навантаження 70 % від розрахункового критичного значення з (1). Розвиток тріщин локалізується в зоні максимальних головних розтягуючих напружень поблизу центральної частини плити, що відповідає класичній схемі нормальних тріщин при згині. Характер тріщиноутворення узгоджується з даними Куцик та Журавського [3], які встановили, що в елементах із класу C50/60 тріщини виникають раніше — при навантаженні, меншому на 19–31% порівняно зі звичайним бетоном. Відношення навантаження тріщиноутворення до руйнівного становить 0,65–0,75, що добре корелює з отриманим у чисельній моделі значенням 0,70. Разом з тим слід зазначити, що чисельна модель відтворює поведінку бетону на основі усередненої діаграми деформування без урахування локальної неоднорідності структури бетону, тому отримані результати щодо моменту утворення тріщин мають наближений характер і потребують верифікації на фізичних збірках у лабораторних умовах.

7. Перспективи подальшого розвитку досліджень

Отримані результати чисельного моделювання є підґрунтям для проведення натурних випробувань фрагментів плит із високоміцного бетону та тришаровим армуванням у лабораторних умовах. Подальші дослідження мають включати: (1) статичні випробування круглих залізобетонних фрагментів з різним розташуванням середньої сітки по висоті перерізу, а в подальшому також заплановані динамічні випробування; (2) дослідження впливу класу бетону C50/60 на характер тріщиноутворення та несучу здатність при продавлюванні; (3) верифікацію вдосконаленої методики на масиві натурних даних для умов аварійного навантаження. (4) Також буде вдосконалене армування і проведені випробування зразків з таким армуванням.

Результати досліджень можуть бути основою для вдосконалення розділу 14 ДБН В.2.2-5:2023, зокрема в частині визначення критеріїв конструкцій при продавленні та застосування високих класів бетону при проектуванні плит перекриттів захисних споруд.

8. Висновки

1. За результатами чисельного моделювання встановлено, що середня арматурна сітка є визначальним елементом у перерозподілі зусиль зони продавлювання: максимальні дотичні напруження $\pm 23,8$ МПа концентруються саме в її площині та в зоні опорного контуру, ідентифікуючи поверхню критичної тріщини під кутом 30–34°. Головні стискаючі напруження у верхньому шарі бетону в приопорній зоні досягають $-41,6$ МПа, що локально перевищує $f_{cd} = 33,3$ МПа та підтверджує зону ініціювання руйнування. Напруження в арматурних стержнях нижнього шару $\sigma_s = 92$ МПа не перевищують $f_{yd} = 335$ МПа, а максимальний прогин 0,32–0,34 мм при двох схемах навантаження, відхилення не перевищує 7 %, підтверджує достатню жорсткість конструкції та коректність прийнятого квазістатичного підходу. Навантаження тріщиноутворення в нелінійній постановці задачі становить 70 % від розрахункового, що відповідає пружно-пластичному характеру деформування бетону класу C50/60, проте потребує верифікації на збірках в лабораторних умовах.

2. Аналітичний розрахунок несучої здатності за формулою (13) для прийнятої схеми армування дав $F_{\max Rd} = 2\,525$ кН при розрахунковому зусиллі продавлювання $V_{Ed} = 38,5$ кН, що взаємно узгоджується з результатами FEM та підтверджує їх достовірність. Нагельна складова тришарового армування $F_{hsw} = 79,9$ кН у 8,5 рази перевищує аналогічний показник для одношарової конфігурації, при цьому найвищу поперечну силу нагельного ефекту

сприймає стержень верхнього шару $\varnothing 20$ мм — $V_{\max} = 8,03$ кН, завдяки достатньому захисному шару та збільшеному моменту спротиву $M_{\max} = 444,9$ Н·м. Застосування високоміцного бетону класу C50/60 відносно звичайного бетону C20/25 збільшує несучу здатності у 1,86 рази, пропорційно відношенню f_{ctm} 4,1 / 2,2 МПа, проте підвищує тріщиноутворення.

3. За результатами чисельного математичного моделювання кругової залізобетонної плити з тришаровим горизонтальним армуванням у ПК Lira-FEM встановлено характер розподілу напружень у бетоні та арматурі при дії квазістатичного навантаження. Максимальні дотичні напруження концентруються в площині середньої арматурної сітки та в зоні опорного контуру, що підтверджує необхідність середнього шару у формуванні нагельного ефекту та ідентифікує поверхню критичної тріщини продавлювання під гострим кутом 30–34°. Напруження в арматурних стержнях не перевищують розрахункового опору, а максимальний прогин підтверджує достатню жорсткість конструкції. Проведене дослідження є першим етапом комплексної науково-дослідної роботи. Числова модель, побудована в квазістатичній постановці задачі, відтворює загальний характер напруженого стану та дозволяє визначити ключові параметри для планування натурних випробувань, однак не враховує локальну неоднорідність структури бетону та динамічні інерційні ефекти, що потребує верифікації на фізичних взірцях. Подальші дослідження передбачають виготовлення та випробування натурних зразків у лабораторних умовах із різним розташуванням середньої сітки по висоті перерізу, що дозволить уточнити розрахункові залежності та верифікувати числову модель за реальними картинами тріщиноутворення і руйнування. Результати дослідження можуть бути використані при проектуванні залізобетонних оболонок та плит перекриттів на дію епізодичних аварійних навантажень, зокрема при розробці та вдосконаленні нормативних положень щодо застосування високоміцного бетону у відповідальних конструктивних елементах.

Список літератури:

- 1) ДБН В.2.2-5:2023. Захисні споруди цивільного захисту. – Київ: Мінінфраструктури України, 2023. – 131 с.
- 2) Михайловський Д.В., Білик А.С., Склярів І.О. Розрахунок конструкцій будівель і споруд на дії основних факторів ураження засобів повітряного нападу: Монографія. – Київ: Каравела, 2024. – 92 с. DOI: 10.32347/2410-2547.2023.111.155-171
- 3) Куцик О.В., Журавський О.Д. Експериментально-теоретичні дослідження залізобетонних згинальних елементів з високоміцного бетону // Будівельні конструкції. Теорія і практика. – 2021. – Вип. 9. – С. 87–93. DOI: 10.32347/2522-4182.9.2021.87-93.
- 4) Кархут І.І. Розвиток наукових основ розрахунків захисних споруд на аварійні температурні та силові навантаження: дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01. – Львів: НУ «ЛП», 2025. – 437 с. Karhut, 2025
- 5) Михайловський Д.В., Склярів І.О., Комар О.А. Порівняння методик розрахунку параметрів вибухово-ударної хвилі для розрахунку споруд інженерного захисту // Будівельні конструкції. Теорія і практика. – 2025. – Вип. 16. – С. 110–123. DOI: 10.32347/2522-4182.16.2025.110-123
- 6) Liu S., Xu X., Zhou B., Yang K. Punching Shear Failure Analysis of Reinforced Concrete Slabs under Close-in Explosion // Materials. – 2023. – Vol. 16, № 18. – 6339. DOI:10.3390/ma16186339
- 7) EN 1992-1-1:2004. Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. – Brussels: CEN, 2004. – 225 p.
- 8) [8] ДСТУ Б В.2.6-156:2010. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування. – Київ: Мінрегіонбуд України, 2011. – 118 с.
- 9) Sagaseta J., Olmati P., Micallef K., Cormie D. Punching shear failure in blast-loaded RC slabs and panels // Engineering Structures. – 2017. – Vol. 147. – P. 177–194. DOI:10.1016/j.engstruct.2017.04.051

- 10) fib Bulletin 81. Punching Shear of Structural Concrete Slabs. Lausanne: fib, 2017. — 394 p. DOI:10.35789/fib.BULL.0081
- 11) Kinney G.F., Graham K.J. Explosive Shocks in Air. — New York: Springer, 1985. — 269 p. DOI: 10.1007/978-3-642-86682-1.
- 12) Koliakova V., Dumych A., Sumak A. Stress-strain state of shelter structures under the action of air shock wave // SWorld-US Conference Proceedings. — 2024. — No. usc22-01. — P. 49–56. DOI:10.30888/2709-2267.2024-22-00-020
- 13) Wang W., Zhang D., Lu F.Y., Wang S.C., Tang F.J. Experimental study on scaling the explosion resistance of a one-way square reinforced concrete slab under a close-in blast loading // International Journal of Impact Engineering. — 2012. — Vol. 49. — P. 158–164. DOI:10.1016/j.ijimpeng.2012.03.010
- 14) Muttoni A. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement // ACI Structural Journal. — 2008. — Vol. 105. — P. 440–45. DOI:10.14359/19858
- 15) Бамбура А.М., Сазонова Г.Р., Дорогова О.В., Войцехівський О.В. Проектування залізобетонних конструкцій. Посібник / За ред. А.М. Бамбури. — Київ: Майстер книг, 2018. — 240 с.

Finite element analysis of reinforced concrete slabs with high-strength concrete and three-layer reinforcement under accidental episodic loading

Roman Havryshkiv

Department of Building Constructions and Bridges, Lviv Polytechnic National University, Ukraine
ORCID: 0009-0006-9631-0805

Abstract: This paper presents numerical finite element analysis of the stress-strain state of a circular reinforced concrete slab with three-layer horizontal reinforcement made of high-strength concrete under quasi-static loading of $q = 100 \text{ kN/m}^2$, corresponding to the normative level of accidental episodic action per DBN V.2.2-5:2023. A three-dimensional finite element model of the welded reinforcement cage was implemented in Lira-FEM software using nonlinear constitutive models for concrete and steel. Punching shear resistance of inclined cross-sections was evaluated using an enhanced model accounting for the dowel effect of horizontal reinforcement at failure angles $\gamma = 34\text{--}40^\circ$, characteristic of dynamic accidental loading. Modelling results show that maximum shear stresses of $\pm 23.8 \text{ MPa}$ concentrate in the plane of the middle reinforcement layer and in the support contact zone, identifying the critical punching crack surface at angles of $30\text{--}34^\circ$. Bottom layer reinforcement stress $\sigma_s = 92 \text{ MPa}$ remains well below $f_{yd} = 335 \text{ MPa}$; maximum deflection of $0.32\text{--}0.34 \text{ mm}$ with a discrepancy of no more than 7 % between two loading schemes confirms structural stiffness and the adequacy of the quasi-static approach. The dowel contribution of the three-layer arrangement is 8.5 times greater than that of single-layer reinforcement, yielding an analytical bearing capacity $F_{\max Rd} = 2\,525 \text{ kN}$ against $V_{Ed} = 38.5 \text{ kN}$. The cracking load in the nonlinear formulation reaches 70 % of the design value, consistent with the elasto-plastic behaviour of HSC C50/60. The results provide a basis for full-scale experimental testing and refinement of normative provisions on the application of high-strength concrete in floor slabs under accidental episodic loading..

Keywords: accidental loading; overpressure; reinforced concrete slab; punching shear; high-strength concrete; dowel effect; deformation method; three-layer reinforcement; numerical modelling.
