

СТІЙКІСТЬ СТІНКИ ПІДКОСУ ПІД ДІЄЮ ПОВЗДОВЖНЬОГО РОЗТЯГУ, ПОПЕРЕЧНОГО СТИСКУ ТА ЗСУВУ

Сергій Сергійович Савінов

Кафедра міцності літальних апаратів, Факультет літакобудування, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна
ORCID 0009-0008-8260-3900

Анотація: Перспективні літаки схеми Transonic Truss-Braced Wing (TTBW) із крилом надвеликого подовження дозволяють суттєво підвищити аеродинамічну ефективність та знизити витрати палива. Одним із ключових елементів таких конструкцій є підкіс крила, тонкостінні стінки якого працюють у складному напруженому стані під дією поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву. Існуючі методики розрахунку переважно орієнтовані на випадки стиску та зсуву і не дозволяють повною мірою врахувати стабілізуючий вплив поздовжнього розтягу на втрату стійкості. Метою роботи є дослідження стійкості тонкостінної стінки підкосу при одночасній дії поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву, а також визначення закономірностей зміни критичних параметрів втрати стійкості залежно від геометрії пластини та співвідношення зовнішніх навантажень. Дослідження виконано на основі класичної теорії тонких пластин. Прогин пластини представлено у вигляді подвійного тригонометричного ряду, після чого задача зведена до спектральної задачі визначення власних значень матриці взаємодії гармонік. Для чисельного розв'язання розроблено алгоритм у середовищі VBA для Microsoft Excel, який реалізує метод Якобі для визначення спектра власних значень та критичних коефіцієнтів зсувної стійкості. Виконана верифікація показала повний збіг результатів із відомими класичними рішеннями для випадку одновісного стиску та зсуву. Встановлено, що поздовжній розтяг підвищує критичні зсувні напруження та чинить стабілізуючий вплив на пластину. При цьому залежність між рівнем розтягу та критичним коефіцієнтом втрати стійкості має нелінійний характер. Також показано, що зі збільшенням поперечного стиску ефективність стабілізуючого впливу розтягу зменшується. Проведене дослідження збіжності підтвердило високу точність запропонованого підходу та можливість його практичного застосування в інженерних розрахунках. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні підкосів перспективних літаків із крилом надвеликого подовження та інших тонкостінних елементів авіаційних конструкцій, які працюють в умовах комбінованого навантаження.

Ключові слова: крило надвеликого подовження, підкіс, пластина, комбіноване навантаження, стійкість.

1. Вступ

Сучасний розвиток цивільної авіації характеризується постійним зростанням вимог до паливної ефективності, зниження експлуатаційних витрат та скорочення викидів шкідливих речовин в атмосферу. Одним із найбільш перспективних напрямів підвищення аеродинамічної ефективності транспортних літаків є застосування крил надвеликого подовження, які забезпечують суттєве зменшення індуктивного опору та, відповідно, зниження витрати палива. Проте збільшення подовження крила супроводжується значним зростанням згинальних моментів у кореневій частині та маси силової конструкції, що обмежує практичне використання традиційних схем літаків.

Для вирішення цієї проблеми в останні роки активно досліджуються концепції літаків типу Truss-Braced Wing (TBW) або Transonic Truss-Braced Wing (TTBW), у яких крило великого подовження підкріплюється зовнішнім підкосом. Така конструктивна схема дозволяє суттєво зменшити згинальні навантаження на крило, знизити його масу та забезпечити досягнення високих аеродинамічних характеристик при збереженні необхідної жорсткості конструкції. Значний інтерес до літаків даного типу підтверджується реалізацією

низки дослідницьких програм, зокрема проекту Х-66А, який розглядається як демонстратор технологій перспективних пасажирських літаків нового покоління.

Введення підкосу до силової схеми крила призводить до появи складного напружено-деформованого стану його елементів. Під час польоту підкіс сприймає значні поздовжні зусилля розтягу, що виникають внаслідок дії підйомної сили на крило. Одночасно внаслідок місцевих силових взаємодій у вузлах кріплення, а також дії поперечних сил і крутних моментів, окремі елементи тонкостінного перерізу підкосу можуть зазнавати поперечного стиску та зсуву. Такий комбінований характер навантаження суттєво впливає на стійкість тонкостінних панелей, які формують стінки підкосу.

Проблема втрати стійкості пластин при дії стиску та зсуву (рисунок 1) достатньо детально досліджена в класичних роботах з теорії пружної стійкості. Так само і задача при дії на пластину двохвісного стиску (рисунок 2). Водночас значно менше уваги приділено випадкам, коли поряд із поперечним стиском на пластину діє поздовжній розтяг. Наявність розтягувальних напружень може істотно змінювати критичні параметри втрати стійкості, підвищуючи або знижуючи запас стійкості залежно від співвідношення компонентів напруженого стану. Для елементів підкосів перспективних літаків типу ТТВW така задача є особливо актуальною, оскільки розтяг є одним із визначальних видів навантаження для даної конструкції.

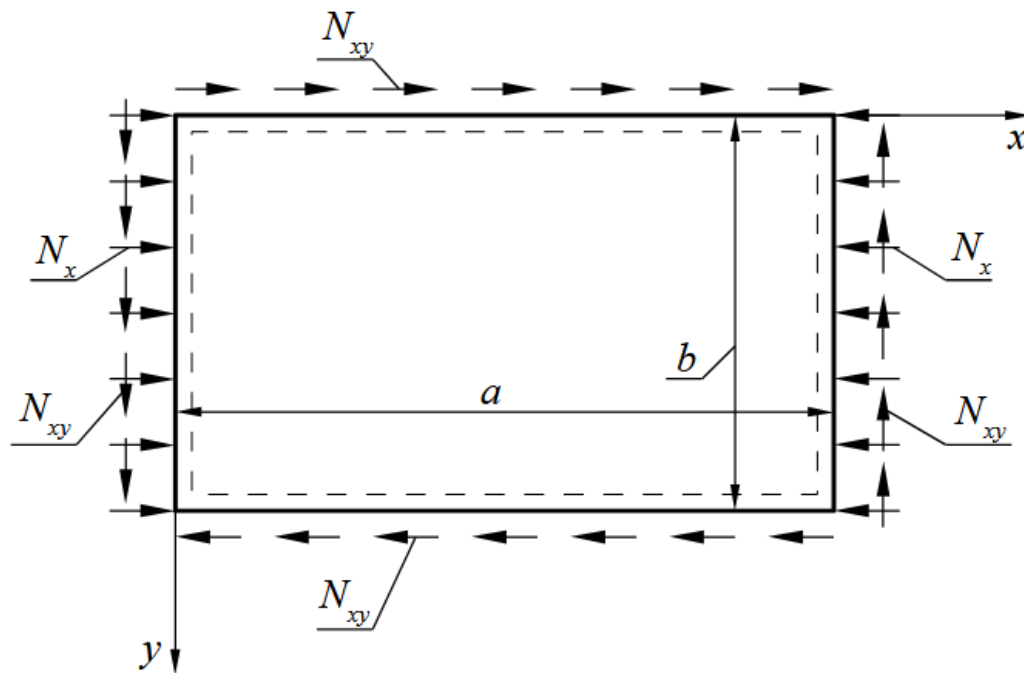


Рис 1. Пластина під дією стиску та зсуву

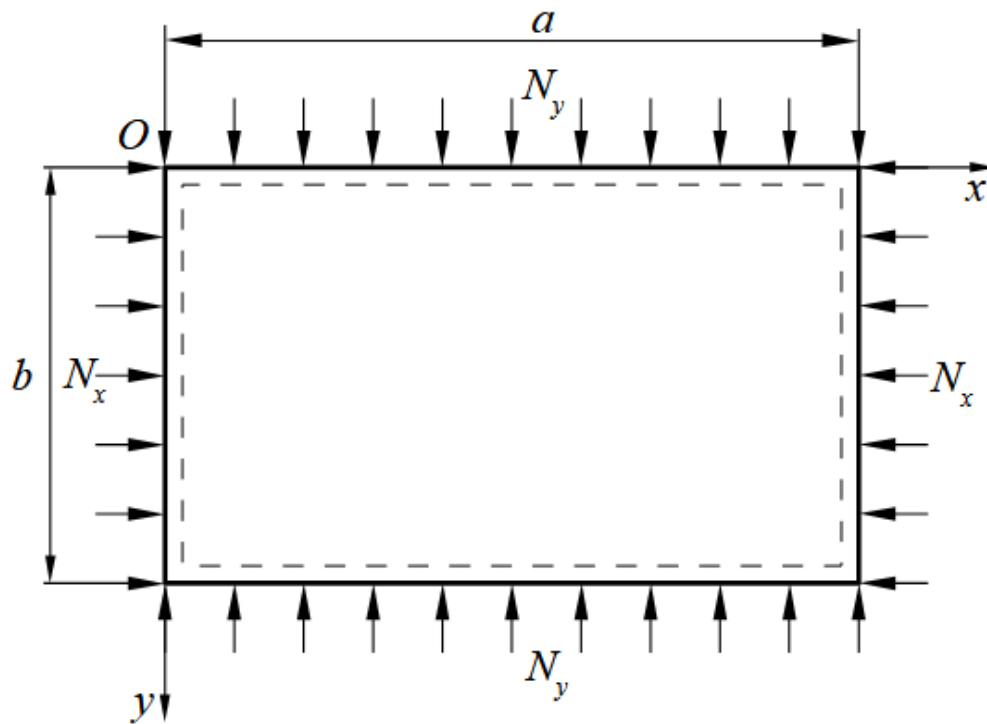


Рис 2. Пластина під дією двовісного стиску

У зв'язку з цим виникає необхідність дослідження стійкості стінки підкосу, представленої у вигляді прямокутної пластини, при одночасній дії поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву. Отримання залежностей критичних параметрів втрати стійкості від геометричних характеристик пластини та рівня прикладених навантажень є важливим для раціонального проектування підкосів перспективних літаків з крилом надвеликого подовження.

Метою роботи є розроблення чисельного підходу до визначення критичних параметрів стійкості пластини при комбінованій дії поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву, а також дослідження впливу співвідношення навантажень і геометричних параметрів на втрату стійкості стінки підкосу перспективного літака схеми ТТВW.

2. Об'єкт і предмет дослідження

Об'єктом дослідження в даній роботі є стінка підкосу крила літального апарата типу Transonic Truss-Braced Wing (ТТВW), що являє собою тонкостінний елемент силової конструкції просторової стрижневої системи, яка з'єднує крило надвеликого подовження з фюзеляжем. У загальному випадку підкіс виконується у вигляді замкнутого тонкостінного профілю (зазвичай прямокутного або наближеного до нього перерізу), який працює переважно на осьовий розтяг або стиск, а також сприймає поперечні навантаження та крутний момент, що виникають у процесі польоту.

Конструктивно підкіс є довгомірним елементом, виготовленим із високоміцних алюмінієвих сплавів або композиційних матеріалів, що забезпечують високе відношення жорсткості до маси. Тонкостінні панелі, які формують його оболонку, мають відносно малу товщину у порівнянні з іншими геометричними розмірами, що обумовлює їхню схильність до втрати стійкості навіть при рівнях напружень, менших за межу текучості матеріалу. Геометричні параметри підкосу, зокрема співвідношення сторін перерізу, товщина стінок та довжина елемента, істотно впливають на його загальну жорсткість та критичні навантаження втрати стійкості.

У сучасних зарубіжних проектах літальних апаратів із крилом надвеликого подовження, зокрема в концепціях NASA X-66A та інших дослідницьких програмах, підкіс розглядається

як ключовий елемент, що дозволяє суттєво знизити згинальні моменти в кореневій частині крила та зменшити його масу. Аналогічні конструктивні рішення застосовуються в експериментальних літаках типу TBW, а також у ряді концептів перспективних регіональних та середньомагістральних літаків. Незважаючи на різницю в реалізаціях, спільною рисою таких систем є робота підкосу в умовах складного просторового напруженого стану, що включає комбінацію розтягу, стиску, зсуву та згину.

Предметом дослідження є закономірності втрати стійкості тонкостінної стінки підкосу при одночасній дії поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву, а також вплив геометричних параметрів пластини та співвідношення навантажень на критичні значення коефіцієнта зсувної стійкості.

Основною проблемою експлуатації підкосів у складі крил типу ТТВW є висока чутливість тонкостінних елементів до локальної втрати стійкості. Навіть при відносно невисоких рівнях загальних навантажень можуть виникати локальні форми випучування стінок, що призводить до перерозподілу внутрішніх зусиль, зниження ефективної жорсткості елемента та потенційного розвитку прогресуючої втрати стійкості. Додатково складність напруженого стану, зумовлена поєднанням розтягу та зсуву, ускладнює застосування класичних аналітичних підходів та вимагає використання чисельних методів для коректної оцінки критичних параметрів стійкості.

Таким чином, досліджуваний об'єкт характеризується складною взаємодією геометричних і навантажувальних факторів, а наявні недоліки у вигляді високої схильності до локальної втрати стійкості та обмеженої точності класичних методів розрахунку в умовах комбінованого навантаження обумовлюють необхідність подальшого детального аналізу його стійкості.

3. Мета та задачі дослідження

Виявлені особливості роботи стінки підкосу крила літального апарата типу ТТВW, зокрема її висока чутливість до локальної втрати стійкості при складному комбінованому напруженому стані, а також обмеженість застосовності класичних аналітичних підходів, обумовлюють необхідність розроблення уточнених методів оцінювання критичних параметрів стійкості тонкостінних елементів.

Метою даного дослідження є визначення закономірностей втрати стійкості стінки підкосу крила типу ТТВW при одночасній дії поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву, а також встановлення залежностей критичного коефіцієнта зсувної стійкості від геометричних параметрів пластини та рівня прикладених навантажень.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

- проаналізувати особливості напружено-деформованого стану стінки підкосу в умовах експлуатаційних навантажень літального апарата схеми ТТВW та виділити домінуючі компоненти навантаження;
- сформулювати математичну модель стійкості тонкостінної пластини з урахуванням одночасної дії поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву;
- отримати розв'язання задачі стійкості у вигляді розкладання прогину в подвійний тригонометричний ряд та сформулювати відповідну систему однорідних рівнянь для коефіцієнтів розкладу;
- здійснити перехід до матричної постановки задачі у вигляді спектральної проблеми для інтегрального оператора взаємодії гармонік;
- розробити чисельний алгоритм визначення власних значень матриці системи на основі ітераційного методу діагоналізації (метод Якобі);
- реалізувати обчислювальну процедуру для визначення критичного коефіцієнта зсувної стійкості та дослідити збіжність розв'язку при зміні кількості членів ряду;
- виконати параметричне дослідження впливу геометричного відношення сторін пластини та рівнів поздовжнього розтягу і поперечного стиску на критичні значення втрати стійкості;

- проаналізувати отримані результати з точки зору їх практичного застосування для проектування підкосів крил перспективних літальних апаратів типу ТТВW.

Результати дослідження мають бути спрямовані на підвищення точності оцінювання стійкості тонкостінних елементів підкосу та забезпечення більш раціонального проектування силових конструкцій крил надвеликого подовження.

4. Аналіз літератури

Питання втрати стійкості тонкостінних пластин та оболонок є однією з фундаментальних проблем механіки деформованого твердого тіла та має особливе значення для авіаційних конструкцій, де вимоги до мінімальної маси поєднуються з високими навантаженнями. Протягом останніх десятиліть значна кількість досліджень була присвячена аналізу стійкості пластин при стиску, зсуві та їх комбінованій дії, однак більшість робіт розглядали окремі випадки навантаження або були орієнтовані на композиційні конструкції.

Одним із найбільш поширених підходів до аналізу стійкості є використання варіаційних методів. Так, автори [1] досліджували втрату стійкості підкріплених композитних пластин з анізотропними властивостями матеріалу за допомогою методу Релея-Рітца. Автори показали високу ефективність напіваналітичного підходу при визначенні критичних навантажень складних композитних конструкцій. Перевагою методу є відносно невисока обчислювальна складність, однак його точність значною мірою залежить від вибору апроксимуючих функцій.

Схожий підхід застосовано в роботі [6], де для аналізу асиметричних багатошарових пластин використано апроксимаційний метод. Дослідження продемонструвало суттєвий вплив схеми армування на критичні параметри втрати стійкості. Водночас метод орієнтований переважно на композитні конструкції та не розглядає складні комбінації навантажень.

В останні роки значна увага приділяється дослідженню нових матеріалів та конструктивних рішень. автори [3] виконали аналіз стійкості ауксетичних ламінованих пластин під дією одновісного стиску. Автори показали, що використання матеріалів із від'ємним коефіцієнтом Пуассона дозволяє підвищити критичні навантаження втрати стійкості. Однак дослідження обмежувалося лише стискальними навантаженнями.

Дослідження [4] було присвячене динамічній втраті стійкості тонких пластин під дією стиску в площині. Автори проаналізували особливості динамічного випучування та показали відмінності між статичною і динамічною втратою стійкості. Незважаючи на важливість отриманих результатів, робота не розглядала вплив зсувних навантажень.

Окремий напрямок становлять дослідження стійкості тонкостінних оболонок. Автори [5] виконали експериментальне та чисельне дослідження втрати стійкості циліндричних оболонок при локальному осьовому стиску. Було встановлено значний вплив локалізації навантаження на критичні параметри конструкції. Проте отримані результати складно безпосередньо застосувати до плоских панелей підкосів літаків.

Питання впливу невизначеностей параметрів на стійкість розглядалися автори [7], які запропонували напіваналітичний стохастичний підхід для оцінки критичних навантажень композитних пластин. Метод дозволяє враховувати випадкові відхилення властивостей матеріалу та геометрії, однак потребує значних обчислювальних ресурсів.

Окрему групу робіт становлять дослідження, присвячені безпосередньо зсувній втраті стійкості. Автори [2] детально проаналізували механізми зсувного випучування гофрованих стінок балок. Автори показали визначальну роль геометричних параметрів та жорсткості елементів у формуванні критичних напружень зсуву.

Для композитних пластин задача зсувної втрати стійкості була розглянута авторами [8], які досліджували вплив пружного закріплення крайок на критичні навантаження. Результати показали, що навіть незначна зміна граничних умов може суттєво впливати на стійкість конструкції.

Автори [9] вивчали вплив згинально-крутильної взаємодії на втрату стійкості пластин при стиску та зсуві. Було встановлено, що зв'язок між окремими формами деформації істотно змінює критичні навантаження, особливо для анізотропних матеріалів.

Важливий внесок у розвиток теорії комбінованого навантаження зробили Автори: [10], [11], [12], а також [13]. У цих роботах досліджувався вплив стиску, зсуву, згину та різних типів закріплення на втрату стійкості пластин. Зокрема, автор [13] виконав детальний аналіз симетричних композитних пластин при комбінованій дії стиску, згину та зсуву.

Подальший розвиток теорії комбінованого навантаження представлено в роботі [14], де розглядалися багатопланові пластини при нерівномірно розподіленому стиску та наявності обмежень у площині пластини. Автори показали істотний вплив крайових умов на критичні навантаження.

Автори [15] досліджували післякритичну поведінку композитних пластин в умовах одночасного впливу температури та вологості. Отримані результати продемонстрували необхідність урахування додаткових фізичних факторів при аналізі стійкості сучасних конструкцій.

Аналіз літературних джерел показує, що більшість існуючих досліджень присвячена задачам стиску, зсуву або їх поєднанню для композитних пластин і оболонок. При цьому практично відсутні роботи, у яких розглядається одночасна дія поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву. Саме такий напружений стан є характерним для стінок підкосів перспективних літаків схеми ТТВW [16], [17]. Крім того, переважна частина досліджень базується на методі скінченних елементів або варіаційних підходах, тоді як спектральні методи дослідження задач стійкості використовуються значно рідше.

У зв'язку з цим у даній роботі застосовано спектральний підхід, заснований на представленні прогину пластини у вигляді подвійного тригонометричного ряду та подальшому переході до задачі на власні значення. Такий підхід дозволяє безпосередньо досліджувати вплив окремих гармонік форми втрати стійкості, забезпечує високу точність розрахунків і дає можливість ефективно аналізувати комбіновану дію поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву, характерну для стінок підкосів перспективних літальних апаратів.

5. Методи досліджень

Дослідження стійкості стінки підкосу крила літального апарата типу ТТВW виконано на основі аналітично-чисельного підходу, який поєднує класичну теорію стійкості тонких пластин, спектральну постановку задачі та ітераційні методи визначення власних значень. Такий підхід дозволяє врахувати комбіновану дію поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву, а також отримати узагальнені залежності критичних параметрів стійкості від геометрії пластини та рівня навантаження.

Математична модель побудована на основі класичної теорії малих прогинів тонких пластин. Прогин пластини ($w(x, y)$) подано у вигляді подвійного тригонометричного ряду Фур'є:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}, \quad (1)$$

де a_{mn} – невідомі коефіцієнти системи рівнянь для різних m та n ;

m – кількість напів-хвиль втрати стійкості вздовж осі x ;

n – кількість напів-хвиль втрати стійкості вздовж осі y ;

a, b – розміри стінки вздовж осі x та y ;

Такий вибір базисних функцій забезпечує автоматичне задоволення кінематичних граничних умов для шарнірно опертої пластини (що є найбільш поширеним та консервативним зв'язком в розрахунках авіаційної техніки) та дозволяє звести вихідну

диференціальну задачу до системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу a_{mn} .

Для врахування впливу напруженого стану вводяться безрозмірні параметри навантаження:

$$K_x = \sigma_x \cdot \frac{b^2 \cdot t}{\pi^2 \cdot D}, \quad (2)$$

$$K_y = \sigma_y \cdot \frac{b^2 \cdot t}{\pi^2 \cdot D}, \quad (3)$$

$$K_s = \tau \cdot \frac{b^2 \cdot t}{\pi^2 \cdot D}, \quad (4)$$

де σ_x – поздовжнє нормальне напруження;

σ_y – поперечне нормальне напруження;

τ – зсувне напруження;

D – циліндрична жорсткість стінки;

t – товщина стінки;

Після підстановки ряду (1) у варіаційне рівняння рівноваги отримано нескінченну систему однорідних рівнянь відносно (a_{mn}) , яка має вигляд:

$$a_{mn} \cdot [(m^2 + n^2 \cdot \beta^2)^2 - K_x \cdot m^2 \cdot \beta^2 - K_y \cdot n^2 \cdot \beta^4] + \frac{32 \cdot \beta^3 \cdot K_s}{\pi^2} \cdot \sum_p^\infty \sum_q^\infty \frac{m \cdot n \cdot p \cdot q}{(m^2 - p^2) \cdot (n^2 - q^2)} \cdot a_{pq} = 0, \quad (5)$$

де β – відношення сторін пластини a/b ;

a_{pq} – невідомі коефіцієнти системи рівнянь для різних p та q ;

p та q – додаткові гармоніки (при чому $p \neq m$ та $q \neq n$).

Отримана система описує взаємодію гармонік форми втрати стійкості та може бути інтерпретована як спектральна задача для інтегрального оператора.

Нескінченна система рівнянь зводиться до матричної форми:

$$\lambda \cdot \xi = B \cdot \xi, \quad (6)$$

де λ – спектральний параметр;

B – матриця взаємодії мод вигини пластини;

ξ – вектор невідомих коефіцієнтів розкладу.

Спектральний параметр, пов'язаний із критичним зсувним навантаженням:

$$\lambda = -\left(\frac{\pi^2}{32 \cdot \beta^3 \cdot K_s}\right), \quad (7)$$

Для побудови матриці B використовувався усічений базис гармонік з номерами m, n, p, q , які змінювалися у межах $1, 2, \dots, M$. У роботі значення M задавалося вручну, що дозволяло досліджувати збіжність рішення при збільшенні кількості членів ряду.

Елементи матриці B визначаються виразом:

$$B_{mnpq} = \frac{m \cdot n \cdot p \cdot q}{(m^2 - p^2) \cdot (n^2 - q^2) \cdot \sqrt{D_{mn}} \cdot \sqrt{D_{pq}}}, \quad (8)$$

де D_{mn} та D_{pq} – діагональні коефіцієнти спектрального оператора для конкретної гармоніки форми втрати стійкості.

Для чисельної реалізації нескінченна система обмежується кінцевим набором гармонік. Зі збільшенням (M) підвищується точність апроксимації, але зростає обчислювальна складність.

Для підвищення чисельної стійкості та фізичної коректності розв'язку виконано декомпозицію задачі на симетричні та антисиметричні форми втрати стійкості. Відбір гармонік здійснювався за умовами парності:

- симетричні моди: $(m + n) \bmod 2 = 0$;
- антисиметричні моди: $(m + n) \bmod 2 = 1$.

Це дозволило розділити загальну матрицю на дві незалежні підсистеми меншої розмірності.

Для визначення власних значень матриці (B) використано ітераційний метод Якобі для діагоналізації симетричних матриць. На кожній ітерації:

- Визначався максимальний за модулем позадіагональний елемент (a_{ij});
- Обчислювався кут повороту ортогонального перетворення;
- Виконувалось обнуління елемента (a_{ij}) за допомогою ортогональної матриці обертання;
- Оновлювалась вся матриця (B).

Ітераційний процес продовжувався до виконання критерію збіжності: $|a_{ij}| < \varepsilon$. При чому похибка $\varepsilon = 10^{-12}$.

Після завершення діагоналізації діагональні елементи матриці відповідали власним значенням λ .

Для кожного власного значення обчислювався відповідний критичний коефіцієнт зсуву з формули (7). Критичне значення визначалося як мінімальне додатне значення серед усіх мод: $K_s = \min(K_{s,i} > 0)$, яке відповідало критичному навантаженню втрати стійкості пластини.

Розрахунок виконувався для діапазону значень геометричного параметра β , що дозволило отримати залежності критичного коефіцієнта зсувної стійкості від форми пластини та рівнів поздовжнього розтягу і поперечного стиску.

Результати представлені у вигляді:

- графіків залежності ($K_s(\beta)$) для різних значень (K_x) та (K_y);
- таблиць збіжності результатів при різних значеннях (M);
- порівняльних діаграм симетричних і антисиметричних форм втрати стійкості;
- спектрів власних значень для характерних конфігурацій навантаження.

Застосований підхід забезпечує узгодженість чисельних результатів із класичними рішеннями для окремих граничних випадків (чистий зсув або чистий стиск) та дозволяє розширити їх на випадок комбінованого навантаження, характерного для елементів підкосів крил літальних апаратів типу TTBW.

6. Результати досліджень

Розроблений алгоритм дозволяє виконувати аналіз стійкості тонкостінних пластин при різних комбінаціях навантажень. На відміну від класичних методик, які здебільшого розглядають окремі випадки дії стиску або зсуву, запропонований підхід забезпечує дослідження загального випадку навантаження, характерного для стінок підкосів літаків схеми TTBW, коли одночасно діють поздовжній розтяг, поперечний стиск та зсув.

Для перевірки коректності реалізованого алгоритму було проведено верифікацію на задачах, для яких існують класичні аналітичні розв'язки. Зокрема, було досліджено випадок одночасної дії одновісного стиску та зсуву, що традиційно використовується при оцінюванні стійкості панелей авіаційних конструкцій.

На рисунку 3 наведено залежність критичного коефіцієнта зсувної стійкості від рівня поздовжнього стиску. Отримані результати повністю узгоджуються з відомими рішеннями теорії стійкості пластин. Із зростанням стискальних напружень спостерігається закономірне зменшення критичних зсувних напружень, необхідних для втрати стійкості. Це пояснюється тим, що стиск знижує загальну жорсткість пластини та сприяє розвитку випучування. Збіг із

класичними результатами підтверджує правильність математичної постановки задачі та коректність реалізованого алгоритму.

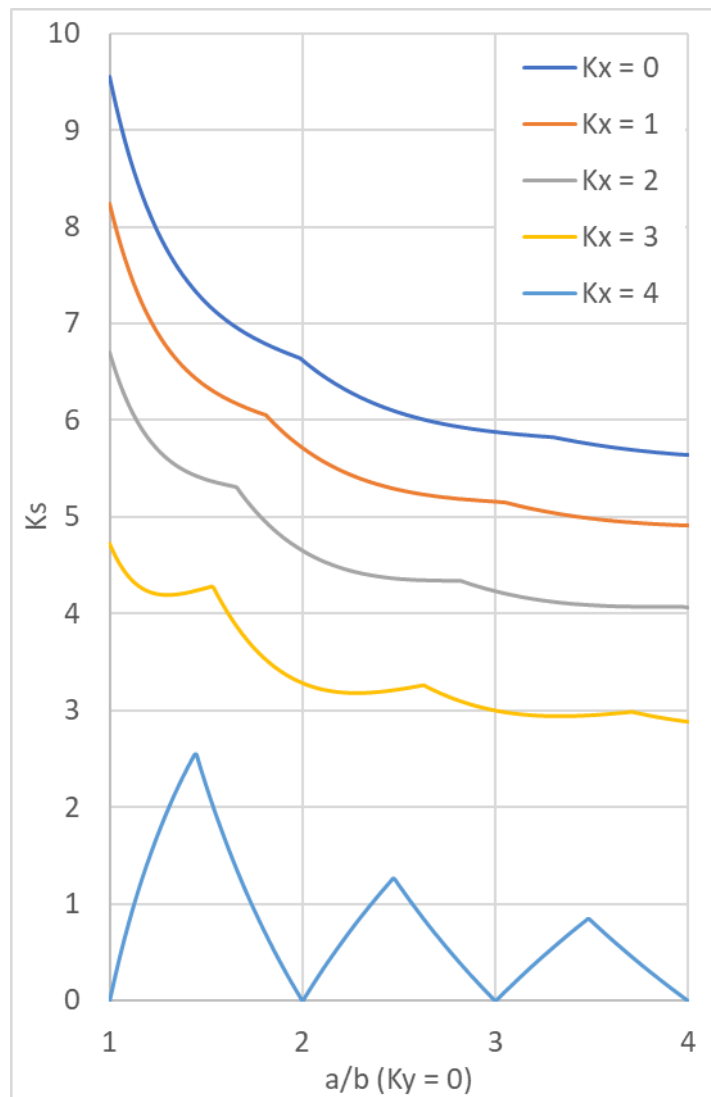


Рис 3. Коефіцієнти втрати стійкості при одновісному стиску та зсуві

Особливий інтерес становить випадок, показаний на рисунку 4, коли замість стиску на пластину діє поздовжній розтяг. Даний випадок практично не розглядається у класичних довідниках зі стійкості пластин, однак є характерним для стінок підкосів перспективних літаків із крилом надвеликого подовження.

Отримані результати демонструють, що збільшення розтягувальних напружень призводить до зростання критичних зсувних напружень. Фізично це пояснюється стабілізуючим впливом розтягу, який перешкоджає розвитку хвиль випучування та підвищує ефективну жорсткість пластини. При цьому залежність не є лінійною. Зі збільшенням розтягу швидкість зростання критичних напружень поступово зменшується, що свідчить про наявність ефекту насичення. Навіть при значних значеннях розтягу пластина залишається чутливою до втрати стійкості під дією зсуву.

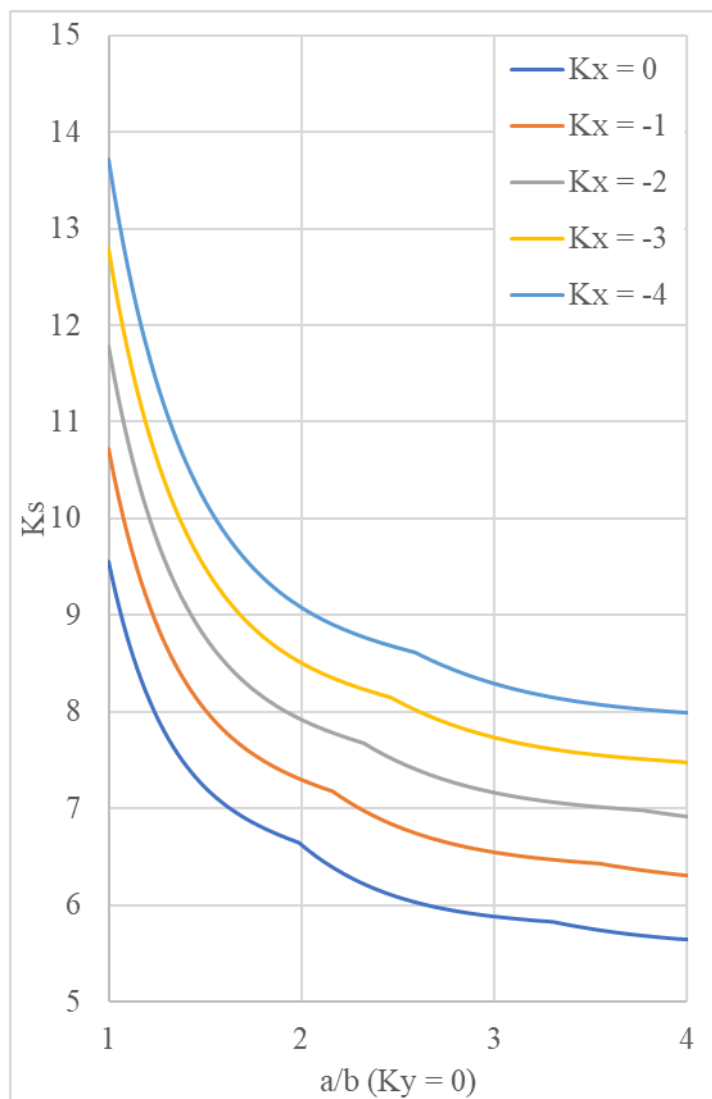


Рис 4. Коефіцієнти втрати стійкості при одновісному розтягу та зсуві

Для дослідження умов роботи стінок підкосу, максимально наближених до реальних, було виконано серію параметричних розрахунків при одночасній дії поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву. Результати представлені на рисунках 5, 6 та 7.

На рисунку 5 наведено результати для випадку помірного поперечного стиску ($K_y = 0.5$). В порівнянні з рисунком 4, видно, що навіть відносно невеликий розтяг істотно компенсує негативний вплив стиску та забезпечує помітне підвищення критичних зсувних напружень. У цьому випадку домінуючий вплив на втрату стійкості має саме розтягувальне навантаження.

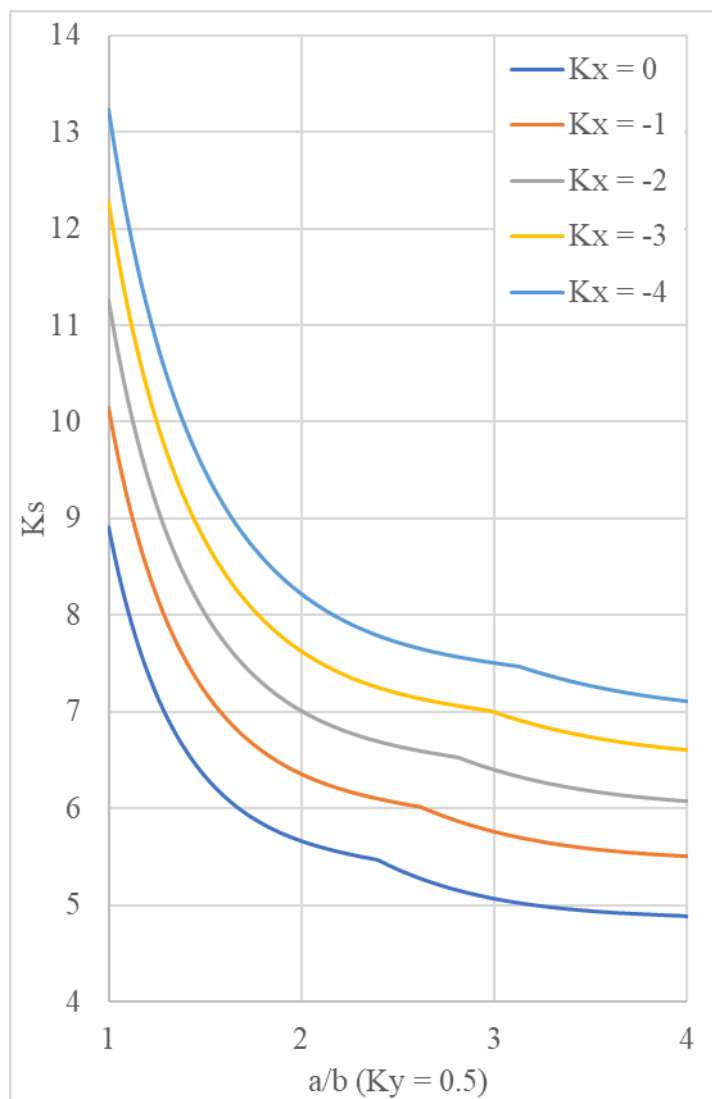


Рис 5. Коефіцієнти втрати стійкості при повздовжньому розтягу, поперечному стиску (0.5) та зсуві

На рисунку 6 показано результати для випадку рівних за величиною безрозмірних параметрів стиску та розтягу ($K_y = 1$). Порівняно з попереднім випадком спостерігається зниження критичних коефіцієнтів зсуву в усьому діапазоні навантажень. Це свідчить про зростання впливу поперечного стиску на процес втрати стійкості та посилення взаємодії між окремими складовими напруженого стану.

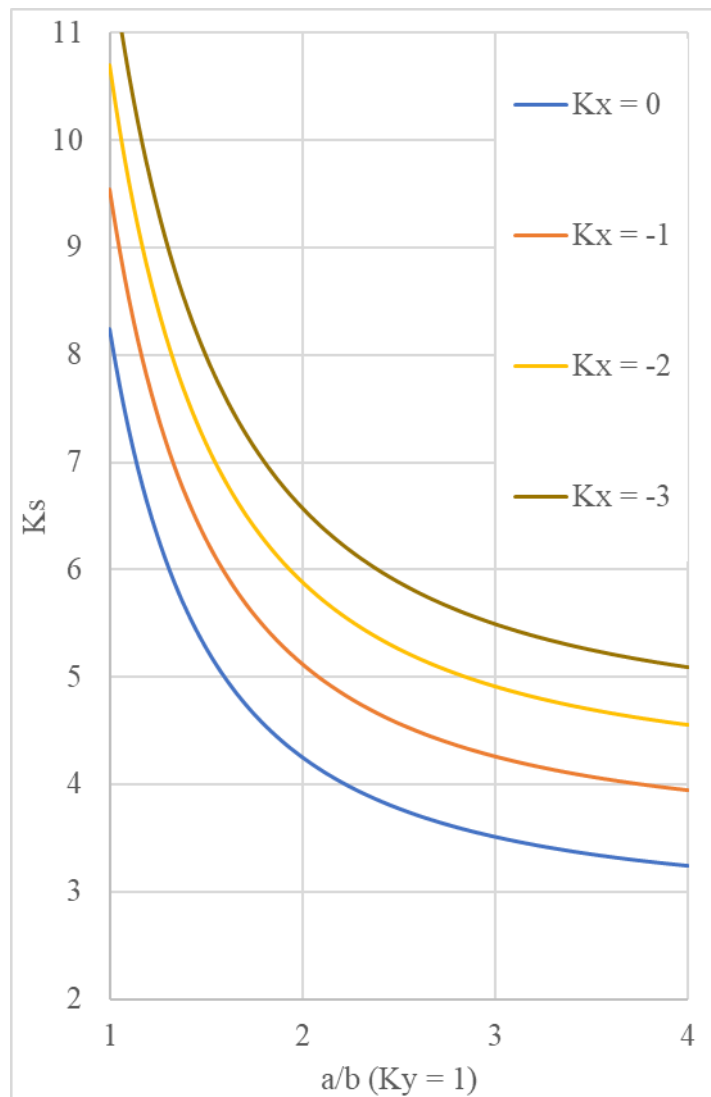


Рис 6. Коефіцієнти втрати стійкості при поздовжньому розтягу, поперечному стиску (1.0) та зсуві

Найбільш складний випадок відповідає рисунку 7, де рівень поперечного стиску у три рази перевищує базове значення ($K_y = 3$). Аналіз результатів показує, що при високих стискальних навантаженнях стабілізуючий вплив поздовжнього розтягу суттєво зменшується. Для забезпечення того самого приросту критичних напружень необхідні значно більші рівні розтягу. Це свідчить про нелінійний характер взаємодії між стиском, розтягом та зсувом.

Порівняльний аналіз рисунків 5-7 показує, що поздовжній розтяг не лише підвищує критичне навантаження втрати стійкості, але й змінює чутливість конструкції до поперечного стиску. Таким чином, при проектуванні підкосів літаків типу ТТВВ врахування розтягувальних напружень дозволяє уникнути надмірного запасу міцності та забезпечити більш раціональне використання матеріалу.

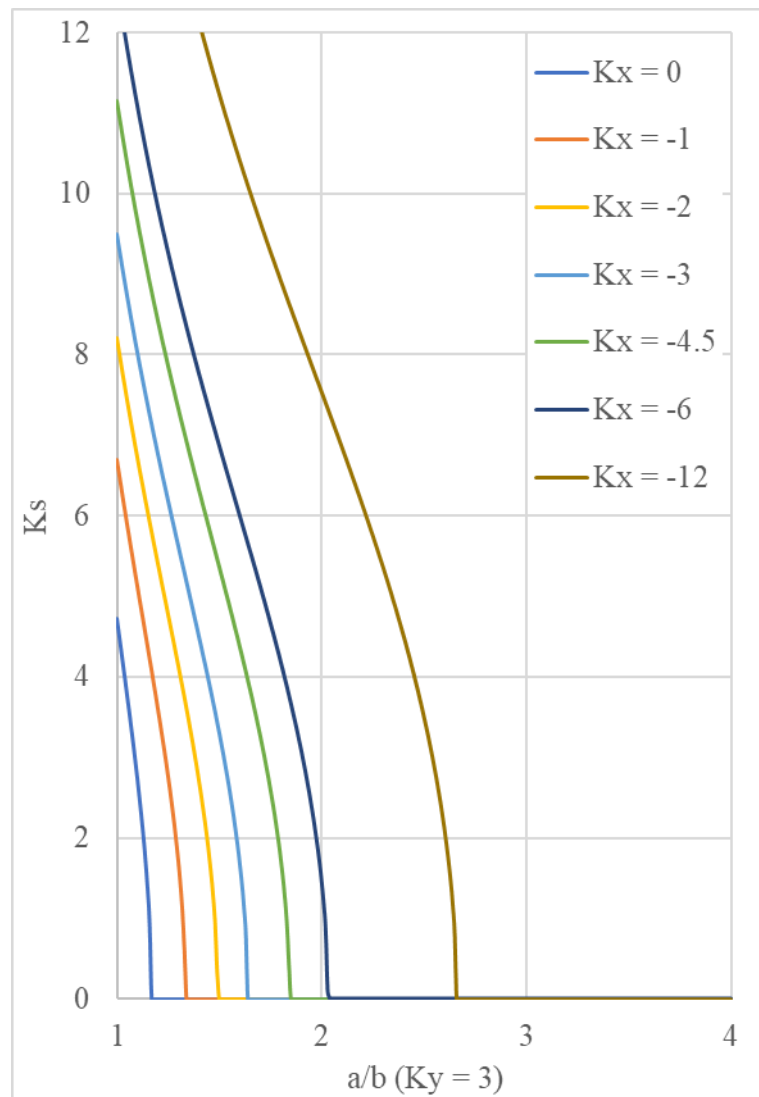


Рис 7. Коефіцієнти втрати стійкості при повздовжньому розтягу, поперечному стиску (3.0) та зсуві

Для оцінки збіжності чисельного алгоритму було проведено окреме дослідження впливу кількості гармонік, що враховуються в розкладі прогину. Результати наведено на рисунку 8 для симетричної та антисиметричної форм втрати стійкості при $K_x = K_y = -1$.

Отримані залежності показують швидку збіжність розв'язку. Уже при використанні семи гармонік ($M = 7$) відхилення результату від граничного значення не перевищує 0,1 %, що є цілком достатнім для інженерних розрахунків. Подальше збільшення кількості членів ряду приводить до незначного уточнення результатів. При ($M = 10 \dots 16$) похибка стає меншою за 0,001 %, тобто фактично досягається чисельна збіжність розв'язку.

З метою забезпечення максимальної точності всі результати, наведені в роботі, отримані при значенні ($M = 16$). Це дозволило виключити вплив похибки апроксимації та гарантувати, що зміна критичних коефіцієнтів стійкості обумовлена виключно впливом досліджуваних параметрів навантаження та геометрії пластини.

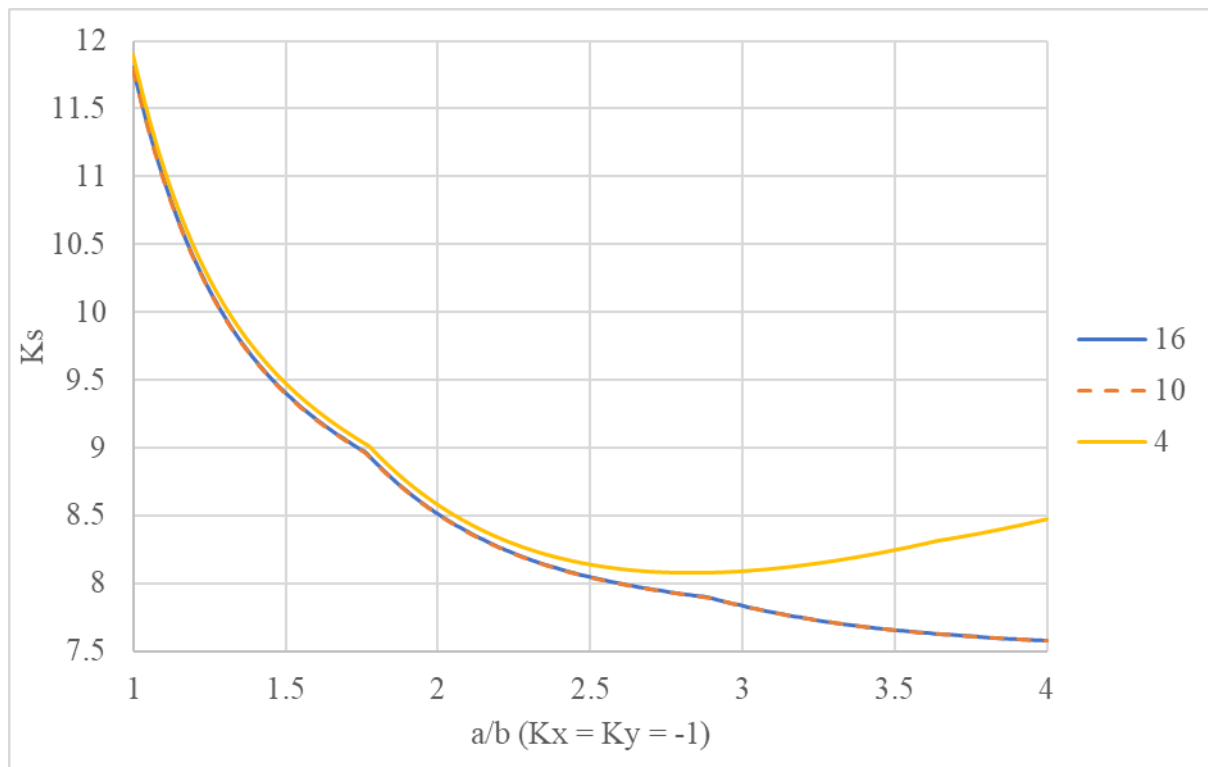


Рис 8. Графіки збіжності

Отримані результати мають практичне значення для проектування підкосів перспективних літаків схеми ТТВW. На відміну від існуючих підходів, які базуються переважно на аналізі стиску та зсуву, запропонований метод дозволяє враховувати стабілізуючий вплив поздовжнього розтягу та визначати реальні запаси стійкості елементів конструкції. Це створює передумови для зменшення маси підкосів, підвищення паливної ефективності літака та більш раціонального використання конструкційних матеріалів.

7. Перспективи подальшого розвитку досліджень

Запропонований у роботі підхід до аналізу стійкості тонкостінних стінок підкосів перспективних літаків типу ТТВW дозволяє враховувати одночасну дію поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву, що відповідає реальним умовам експлуатації даних конструкцій. Отримана математична модель та реалізований чисельний алгоритм можуть бути використані як на етапі попереднього проектування підкосів, так і для уточнювальних розрахунків окремих елементів силового набору.

Перевагою запропонованого методу є використання безрозмірних параметрів навантаження та спектральної постановки задачі, що забезпечує можливість швидкого аналізу впливу геометричних характеристик пластини та співвідношення навантажень без необхідності побудови складних скінчено-елементних моделей. Це дозволяє суттєво скоротити час виконання параметричних досліджень на ранніх стадіях проектування авіаційних конструкцій.

Подальший розвиток дослідження може бути пов'язаний із розширенням математичної моделі на випадок інших граничних умов закріплення пластини. У реальних конструкціях підкосів краї панелей можуть мати пружне або частково защемлене закріплення, що може істотно впливати на критичні параметри втрати стійкості. Урахування таких особливостей дозволить наблизити результати розрахунку до реальних умов роботи конструкції.

Перспективним напрямом також є поширення запропонованого підходу на ортотропні та композиційні матеріали. Оскільки сучасні проекти літаків із крилом надвеликого подовження активно використовують композиційні конструкції для зниження маси, дослідження впливу анізотропії матеріалу на втрату стійкості стінок підкосів має важливе практичне значення.

Окремий інтерес становить врахування геометричних недосконалостей, залишкових напружень та початкових відхилень форми стінок. Відомо, що тонкостінні конструкції є чутливими до таких факторів, тому їх включення до математичної моделі дозволить отримати більш достовірні оцінки запасів стійкості та підвищити точність прогнозування поведінки конструкції.

Подальше вдосконалення методу може бути пов'язане з переходом від лінійної задачі стійкості до геометрично нелінійного аналізу післякритичної поведінки панелей. Це дозволить досліджувати не лише момент втрати стійкості, а й подальший розвиток деформацій та можливість безпечної роботи конструкції в післякритичному стані.

Практичне впровадження результатів роботи можливе під час проектування перспективних літаків схеми ТТВW, а також інших тонкостінних елементів авіаційних конструкцій, які працюють в умовах комбінованого навантаження. Отримані залежності можуть бути використані для вибору раціональних геометричних параметрів стінок підкосів, оцінювання запасів стійкості та оптимізації маси конструкції.

Таким чином, запропонований метод дослідження має значний потенціал для подальшого розвитку та може стати основою для створення інженерних методик розрахунку стійкості елементів перспективних літальних апаратів із крилом надвеликого подовження.

8. Висновки

У роботі розроблено аналітично-чисельний метод дослідження стійкості тонкостінних пластин при одночасній дії поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву. Метод базується на представленні прогину пластини у вигляді подвійного тригонометричного ряду, подальшому переході до спектральної задачі та визначенні власних значень матриці взаємодії гармонік.

Виконана верифікація розробленого алгоритму на класичній задачі стійкості пластини при одновісному стиску та зсуві показала повний збіг отриманих результатів із відомими аналітичними розв'язками. Це підтвердило коректність математичної постановки задачі та достовірність реалізованого чисельного алгоритму.

Встановлено, що поздовжній розтяг чинить стабілізуючий вплив на пластину та призводить до збільшення критичних зсувних напружень. При цьому залежність між величиною розтягу та критичним коефіцієнтом втрати стійкості має нелінійний характер. Зі зростанням розтягувальних напружень підвищується опір пластини втраті стійкості, однак навіть при великих значеннях розтягу можливість втрати стійкості під дією зсуву повністю не усувається.

Показано, що одночасна дія поздовжнього розтягу та поперечного стиску суттєво впливає на критичні параметри стійкості. Зі збільшенням рівня поперечного стиску стабілізуючий ефект розтягу поступово зменшується, а критичні коефіцієнти зсувної стійкості знижуються. Це свідчить про складну нелінійну взаємодію окремих компонентів напруженого стану та необхідність їх спільного врахування під час розрахунку тонкостінних елементів.

Дослідження збіжності показало високу ефективність запропонованого підходу. Для практичних інженерних розрахунків достатнім є використання семи гармонік у тригонометричному розкладі, що забезпечує похибку менше 0,1 %. При збільшенні кількості гармонік до 10-16 похибка зменшується до менш ніж 0,001 %, що свідчить про швидку збіжність спектрального розв'язку.

Отримані результати мають практичне значення для проектування підкосів перспективних літаків із крилом надвеликого подовження типу ТТВW. На відміну від традиційних підходів, запропонована методика дозволяє враховувати характерний для таких конструкцій напружений стан, за якого стінки підкосу одночасно працюють під дією поздовжнього розтягу, поперечного стиску та зсуву. Це дає можливість більш точно оцінювати запаси стійкості та виконувати раціональне вагове проектування конструкції.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на врахування пружних граничних умов, геометричних недосконалостей, залишкових напружень та анізотропних властивостей композиційних матеріалів, а також на аналіз післякритичної поведінки стінок підкосів у геометрично нелінійній постановці задачі.

Список літератури:

- 1) Stamatelos, D. G., & Labeas, G. N. (2023). Buckling analysis of laminated stiffened plates with material anisotropy using the rayleigh–ritz approach. *Computation*, 11(6), 110. <https://doi.org/10.3390/computation11060110>
- 2) Hassanein, M., Shao, Y., & Zhou, M. (2022). Shear buckling behavior. *У Behavior and design of trapezoidally corrugated web girders for bridge construction* (с. 41–94). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/b978-0-323-88437-2.00004-6>
- 3) Wang, K., Wan, F., Luo, L., Cao, P., Han, L., & Jin, P. (2023). Buckling enhancement analysis of auxetic laminated rectangular plate under uniaxial compression. *Applied Sciences*, 13(10), 6244. <https://doi.org/10.3390/app13106244>
- 4) Kubiak, T., Borkowski, L., & Perlikowski, P. (2023). Some aspects of dynamic buckling and dynamic response of thin plate under in-plane compression. *Thin-Walled Structures*, 182, 110294. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110294>
- 5) Ma, H., Jiao, P., Li, H., Cheng, Z., & Chen, Z. (2023). Buckling analyses of thin-walled cylindrical shells subjected to multi-region localized axial compression: Experimental and numerical study. *Thin-Walled Structures*, 183, 110330. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110330>
- 6) Falkowicz, K., Wismulski, P., & Debski, H. (2023). Buckling analysis of laminated plates with asymmetric layup by approximation method. *Materials*, 16(14), 4948. <https://doi.org/10.3390/ma16144948>
- 7) Maleki, A. T., Parviz, H., Khatibi, A. A., & Zakeri, M. (2023). Probabilistic stability of uncertain composite plates and stochastic irregularity in their buckling mode shapes: A semi-analytical non-intrusive approach. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*. <https://doi.org/10.1007/s11709-022-0888-z>
- 8) Chen, Q., & Qiao, P. (2015). Shear buckling of rotationally-restrained composite laminated plates. *Thin-Walled Structures*, 94, 147–154. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.04.006>
- 9) York, C. B., & de Almeida, S. F. M. (2018). Effect of bending-twisting coupling on the compression and shear buckling strength of infinitely long plates. *Composite Structures*, 184, 18–29. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.085>
- 10) Bedair, O. K. (1997). Influence of in-plane restraint on the buckling behaviour of plates under uniform compression, shear and in-plane bending. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(1-2), 1–10. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(97\)00035-2](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(97)00035-2)
- 11) Sherbourne, A. N., & Pandey, M. D. (1992). Effects of in-plane restraints on the stability of laminated composite plates. *Composite Structures*, 20(2), 73–81. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(92\)90063-i](https://doi.org/10.1016/0263-8223(92)90063-i)
- 12) Papazoglou, V. J., Tsouvalis, N. G., & Kyriakopoulos, G. D. (1992). Buckling of unsymmetric laminates under linearly varying, biaxial in-plane loads, combined with shear. *Composite Structures*, 20(3), 155–163. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(92\)90022-5](https://doi.org/10.1016/0263-8223(92)90022-5)
- 13) Nemeth, M. P. (1992). Buckling of symmetrically laminated plates with compression, shear, and in-plane bending. *AIAA Journal*, 30(12), 2959–2965. <https://doi.org/10.2514/3.11643>
- 14) Cagdas, I. U., & Adali, S. (2011). Buckling of cross-ply laminates subject to linearly varying compressive loads and in-plane boundary restraints. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 26(2), 193–215. <https://doi.org/10.1177/0892705711420594>
- 15) Pandey, R., Upadhyay, A. K., & Shukla, K. K. (2010). Hygrothermoelastic postbuckling response of laminated composite plates. *Journal of Aerospace Engineering*, 23(1), 1–13. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0893-1321\(2010\)23:1\(1\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0893-1321(2010)23:1(1))
- 16) Pelykh, V., & Andryushchenko, V. (2024). Determination of the features of integrated design of civil long-range aircraft with transonic truss-braced wing at the preliminary design stage.

Technology Audit and Production Reserves, 1(1(75)), 35–42. <https://doi.org/10.15587/2706-5448.2024.298600>

17) Gur, O., Bhatia, M., Mason, W. H., Schetz, J. A., Kapania, R. K., & Nam, T. (2011). Development of a framework for truss-braced wing conceptual MDO. Structural and Multidisciplinary Optimization, 44(2), 277–298. <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0612-9>