
Аналіз напружено-деформованого стану втулок несучого шару від дії статичного навантаження

Олександр Юрійович Деньщиків

кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, Україна
ORCID: 0009-0008-2385-5841

Ярослав Володимирович Гребенюк

кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, Україна
ORCID: 0009-0004-6032-7125

Олександр Борисович Савін

кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, Україна
ORCID: 0000-0002-1577-6990

Віталій Юрійович Мірошніков

кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, Україна
ORCID: 0000-0002-9491-0181

Для цитування цієї статті:

Деньщиків Олександр Юрійович, Гребенюк Ярослав Володимирович, Савін Олександр Борисович, Мірошніков Віталій Юрійович. Аналіз напружено-деформованого стану втулок несучого шару від дії статичного навантаження. International Science Journal of Engineering & Agriculture. Vol. 3, No. 3, 2024, pp. 51-60. doi: 10.46299/j.isjea.20240303.05.

Надійшла до редакції: 05 травня 2024 р.; **Схвалено:** 29 травня 2024 р.;

Опубліковано: 01 червня 2024 р.

Анотація: Запропоновано метод розв'язання просторової задачі теорії пружності для шару на врізаних циліндричних опорах з втулками. Втулки розглядаються як товстостінні труби. На плоских поверхнях шару задані напруження, на внутрішніх поверхнях труб задані переміщення. Між шаром та трубами задані умови спряження у вигляді жорсткого з'єднання. Матеріали шару та труб пружні, однорідні з різними фізико-механічними властивостями. Шар та труби розглядаються в різних локальних системах координат (декартовій та циліндричних). Для розв'язання задачі застосовується рівняння Ламе. Поєднання базисних розв'язків рівняння Ламе в різних системах координат відбувається за допомогою аналітико-числового узагальненого методу Фур'є. Задовольняючи граничним умовам та умовам спряження створена система лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, до яких застосований метод редукції. Чисельний аналіз показав високу збіжність результатів до точного (точність виконання граничних умов склала 10^{-5} при порядку системи рівнянь $m = 4$ для значень від 0 до 1). Аналіз напруженого стану проведений для пластикової втулки різної товщини та шару з алюмінієвого сплаву Д16Т. Отримані результати свідчать, що при зменшенні внутрішнього радіусу втулки напруження на її поверхні значно зростають, що повинно бути враховано при застосуванні матеріалів з низькими фізико-механічними характеристиками. Запропонований метод може бути застосований для отримання високоточних результатів під час проектування

з'єднань деталей машин і механізмів, модель яких є шар на циліндричних врізаних опорах з втулками. Отримані числові результати можуть бути застосовані для прогнозування геометричних параметрів під час проектування.

Ключові слова: Шар з циліндричними включеннями, волокнистий композит, узагальнений метод Фур'є

1. Вступ

Застосування втулок є дуже поширеним в різних галузях, відігравуючи в з'єднаннях важливу роль. Найбільш поширеними є машино та авіабудування, енергетичне обладнання, будівництво, мебельна галузь, іграшки, медицина, тощо. В машино та авіабудуванні втулки використовуються для прямого руху елементів механізмів, забезпечуючи точність та плавність роботи, для герметизації отворів та зазорів, запобігаючи витоку рідин або газів, для захисту деталей від пилу, бруду та інших зовнішніх впливів.

Незважаючи на активне застосування втулок, методи розрахунку таких вузлів майже відсутні. Пов'язано це зі складною моделлю, яка утворюється при поєднанні тіл з різними канонічними поверхнями. Найбільш поширеним є застосування методів будівельної механіки [1, 2], але в цьому випадку доводиться суттєво спрощувати модель.

Інший підхід це застосування чисельних методів, наприклад, методу скінчених елементів [3] та програмних комплексів на його основі [4]. Так за допомогою методу скінчених елементів розв'язана задача для армованого півпростору з вертикальною циліндричною порожниною [5]. Але чисельні методи є наближеними де точність може бути непередбачуваною і залежати від багатьох факторів.

Застосування точних аналітичних методів [6, 7] базується на розкладі в ряд Фур'є. Це є ефективним при наявності граничних поверхонь до трьох і в плоскій постановці, що також звужує спектр застосування.

Аналітико-числові методи є високоточними, але кожен з таких методів розв'язує тільки своє коло задач, обмежуючись певними умовами.

Найбільш ефективним аналітико-числовим методом розв'язання задач для шару з поздовжніми неоднорідностями є узагальнений метод Фур'є [8]. Цей метод застосовується до рівнянь Ламе, пов'язуючи базисні розв'язки в різних системах координат. Це дозволяє з наперед заданою точністю отримати результат напружено-деформованого стану.

Так, за допомогою узагальненого методу Фур'є, розв'язані задачі для циліндру з циліндричними порожнинами [9, 10] або включеннями [11]. Задача для півпростору з циліндричною порожниною розв'язана в роботі [12], шару з однією або декількома циліндричними порожнинами в роботах [13 – 15]. Але методи, що використовуються в роботах [9 – 15], не враховують умов спряження між шаром та включенням.

Для шару з одним повнотілим циліндричним включенням присвячено роботу [16], з декількома повнотілими включеннями роботу [17]. Однак рівняння для повнотілого включення і для труби є різними, що не дає можливості застосовувати ці роботи [16, 17] для розв'язання задач з трубами (втулками).

Задача для шару з однією циліндричною трубою розглянута в роботі [18]. Однак метод розв'язання цієї роботи не підходить для задачі з декількома трубами.

Метою цієї роботи є:

- створення методу розрахунку задачі теорії пружності для шару з двома поздовжніми циліндричними товстостінними трубами. Внутрішні поверхні труб використовуються як опори;

- проведення аналізу напружено-деформованого стану труби при різній її товщині.

Для досягнення мети необхідно поєднання формул та алгоритмів попередніх робіт а також застосування інших типів граничних умов.

2. Постановка задачі

Шар тримається на двох врізаних опорах через циліндричні втулки (рис.1). Втулки представлені як товстостінні циліндричні труби зовнішнім радіусом R_p , внутрішнім \tilde{R}_p , p – номер труби. Товстостінні циліндричні труби розглядаються в локальних циліндричних координатах (ρ_p, φ_p, z) . Шар розглядається у декартовій системі координат (x_1, y_1, z) , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат труби $p = 1$. Відстань до верхньої межі шару h , до нижньої межі $-\tilde{h}$.

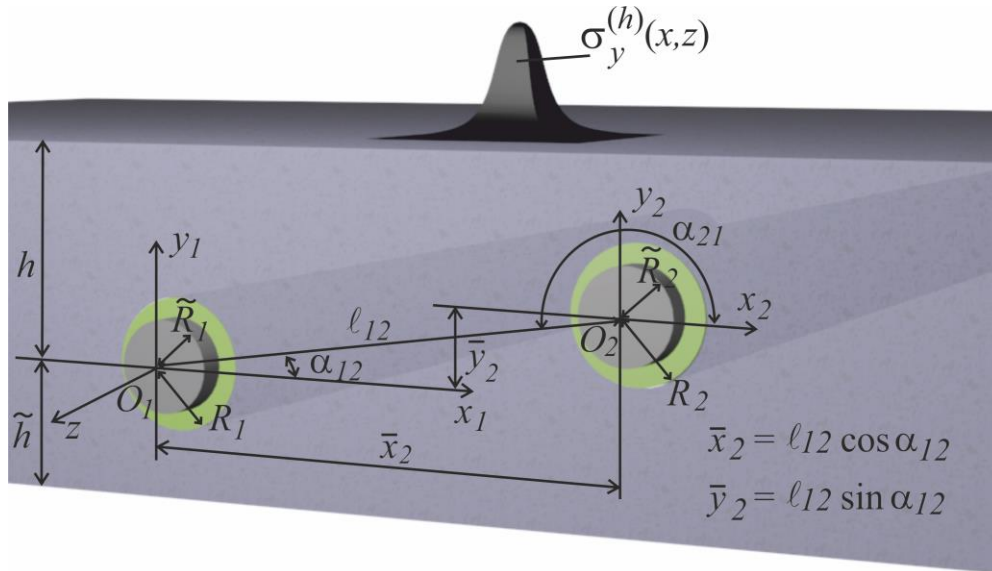


Рис. 1. Шар з товстостінними циліндричними трубами та циліндричною порожниною.

Граничні поверхні труб та шару між собою не перетинаються. Матеріали шару та труб є пружними, ізотропними та однорідними.

На верхній та нижній межах шару задані напруження

$$F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z),$$

$$F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z),$$

на внутрішніх поверхнях труб задані переміщення:

$$\vec{U}(\varphi_1, z)|_{\rho_1=\tilde{R}_1} = \vec{U}_1^0(\varphi_1, z),$$

$$\vec{U}(\varphi_2, z)|_{\rho_2=\tilde{R}_2} = \vec{U}_2^0(\varphi_2, z)$$

де

$$\vec{F}_h^0(x, z) = \tau_{yx}^{(h)}\vec{e}_x + \sigma_y^{(h)}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)}\vec{e}_z,$$

$$\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})}\vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})}\vec{e}_z,$$

$$\vec{U}_1^0(\varphi_1, z) = U_\rho^{(1)}\vec{e}_\rho + U_\varphi^{(1)}\vec{e}_\varphi + U_z^{(1)}\vec{e}_z$$

$$\vec{U}_2^0(\varphi_2, z) = U_\rho^{(2)}\vec{e}_\rho + U_\varphi^{(2)}\vec{e}_\varphi + U_z^{(2)}\vec{e}_z$$

(1)

– відомі функції.

Умови спряження між шаром та трубами:

$$\vec{U}_0(\varphi, z)|_{\rho=R_1} = \vec{U}_p(\varphi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (2)$$

$$F\vec{U}_0(\varphi, z)|_{\rho=R_1} = F\vec{U}_p(\varphi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (3)$$

де $\vec{U}_0(\varphi, z)$ – розв’язок для шару; $\vec{U}_p(\varphi, z)$ – розв’язок для труби з номером p ;
 $F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right]$ – оператор напруження.

3. Розв’язання задачі

Розв’язок задачі представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\mu d\lambda + \\ &+ \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) d\lambda,$$

$$\vec{U}_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_2, \varphi_2, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_2, \varphi_2, z; \lambda) d\lambda,$$

де $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)$ – невідомі функції, які необхідно знайти із крайових умов (1) та умов спряження (2), (3).

Базисні розв’язки рівняння Ламе $\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$, $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ застосовані у вигляді [8]:

$$\vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m \varphi)};$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m \varphi)} \right]; k = 1, 2, 3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\nu - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\nu - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Задоволення граничних умов (1) створює систему з 12 (по одному на кожну проекцію) нескінчених лінійних алгебраїчних рівнянь. Умови спряження (2) та (3) для кожної труби додають ще 12 рівнянь. Таким чином формується система з 24 рівнянь для знаходження 24 невідомих рівняння (4).

Під час задоволення граничних умов на поверхнях шару, відомі функції $\bar{F}_h^0(x, z)$ та $\bar{F}_h^0(x, z)$ попередньо представлені через подвійний інтеграл Фур'є. Це дало змогу позбутися від інтегралів правої та лівої частини (4). Під час задоволення граничних умов на внутрішніх поверхнях труб, відомі функції $\bar{U}_1^0(\varphi_1, z)$ та $\bar{U}_2^0(\varphi_2, z)$ попередньо представлені через інтеграл та ряд Фур'є. Це дало змогу позбутися від інтеграла та рядів Фур'є правої та лівої частини (4).

Кожне рівняння створеної системи приведено до однієї системи координат за допомогою формул переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе [8]:

– від зовнішніх розв'язків для циліндра $\bar{S}_{k,m}$ до розв'язків для шару $\bar{u}_k^{(-)}$ (at $y > 0$) та $\bar{u}_k^{(+)}$ (at $y < 0$)

$$\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k = 1, 3;$$

$$\bar{S}_{2,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \bar{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm \right.$$

$$\left. \pm 4\mu(1-\sigma)\bar{u}_3^{(\mp)} \right) \cdot \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2},$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– від розв'язків шару $\bar{u}_k^{(+)}$ and $\bar{u}_k^{(-)}$ до внутрішніх розв'язків циліндру $\bar{R}_{k,m}$

$$\bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) = e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, \quad (k = 1, 3);$$

$$\bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) = e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \right. \right.$$

$$\left. \left. \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma)\bar{R}_{3,m} \right) \right],$$

де $\bar{R}_{k,m} = \bar{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda z)}$; $\bar{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_{\varphi} \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right)$;

$\bar{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot \left[(4\nu - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho_p I''_n(\lambda\rho) \right] + \bar{e}_{\varphi} i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\nu - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda\rho I'_n(\lambda\rho)$;

$$\bar{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\bar{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_{\varphi} \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right];$$

– від розв'язків циліндру з номером p до розв'язків циліндру з номером q

$$\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(m\varphi_q + \lambda z)}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \bar{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot \bar{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot [\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda\ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda\ell_{pq})] \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

де $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

В результаті створена нескінчена система лінійних алгебраїчних рівнянь зведена з порядком системи – m . В чисельному дослідженні застосований метод редукції.

Таким чином порядок системи рівнянь m є параметром точності результатів розрахунку.

4. Чисельні дослідження напруженого стану

Пружний ізотропний шар (рис.1) має дві пружні ізотропні циліндричні труби зовнішнім радіусом $R_1 = R_2 = 16$ мм, внутрішнім, розрахованим в двох варіантах: $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 = 11$ мм та $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 = 5$ мм. Відстань від центру першої труби до верхньої та нижньої межі шару $h = \tilde{h} = 32$ мм. Відстань між циліндричними неоднорідностями: $L_{12} = 100$ мм, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{13} = 0$. Матеріал шару: алюмінієвий сплав Д16Т, коефіцієнт Пуассона $\nu_0 = 0,3$, модуль пружності $E_0 = 71000$ МПа. Матеріал втулок (товстостінних труб): пластик $\nu_1 = \nu_2 = 0,38$, модуль пружності $E_1 = E_2 = 1700$ МПа.

На верхній межі шару задані напруження $\sigma_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot \left(\left(x - \frac{\bar{x}_2}{2} \right)^2 + 10^2 \right)^{-2}$

, $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, де $\frac{\bar{x}_2}{2}$ величина зсуву навантаження вздовж осі x (рис.1). На нижній межі шару задані нульові напруження $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$. На внутрішній поверхні труб задані нульові переміщення $U_\rho^{(1)} = U_\phi^{(1)} = U_z^{(1)} = 0$, $U_\rho^{(2)} = U_\phi^{(2)} = U_z^{(2)} = 0$.

Точність виконання граничних умов при $m = 5$ та вказаних значеннях геометричних параметрів склала 10^{-4} .

На рис.2 представлено напруження σ_ρ на граничних поверхнях лівої труби, в залежності від радіусу до її внутрішньої поверхні \tilde{R}_1 .

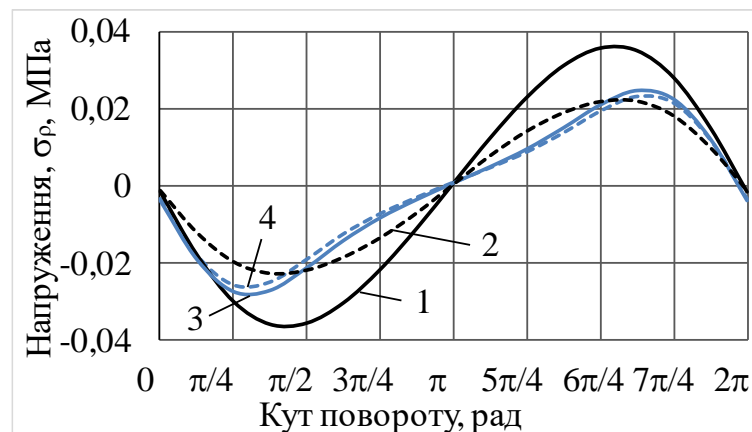


Рис. 2. Напруження σ_ρ : 1 – при $\rho = \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 = 5$ мм; 2 – при $\rho = R_1$, $\tilde{R}_1 = 5$ мм; 3 – при $\rho = \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 = 11$ мм; 4 – при $\rho = R_1$, $\tilde{R}_1 = 11$ мм.

Напруження σ_ρ в верхній частині лівої опори від’ємні, в нижній додатні.

На внутрішній стороні труби напруження σ_ρ більші за напруження на спряженні між шаром та трубою (рис.2).

В залежності від радіусу до внутрішньої поверхні труби, при зменшенні цього радіуса, напруження σ_ρ значно збільшуються на внутрішній поверхні труби (рис.2, лінія 1) і складають $\sigma_{\rho(\max)} = -0,0363249$ МПа.

Напруження σ_ϕ на граничних поверхнях лівої труби, в залежності від радіусу до її внутрішньої поверхні \tilde{R}_1 , представлені на рис.3.

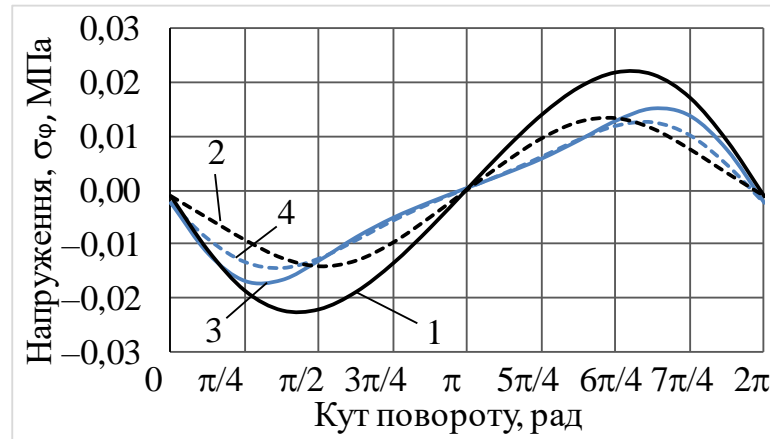


Рис. 3. Напруження σ_ϕ : 1 – при $\rho = \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 = 5$ мм; 2 – при $\rho = R_l$, $\tilde{R}_1 = 5$ мм; 3 – при $\rho = \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 = 11$ мм; 4 – при $\rho = R_l$, $\tilde{R}_1 = 11$ мм.

Характер розподілу напруження σ_ϕ (рис.3) на поверхнях лівої втулки мало відрізняється від напружень σ_ρ (рис.2): в верхній частині лівої опори напруження σ_ϕ від'ємні, в нижній додатні.

При зменшенні радіуса \tilde{R}_1 , напруження σ_ϕ значно збільшуються на внутрішній поверхні труби (рис.3, лінія 1) і складають $\sigma_{\phi(\max)} = -0,02226$ МПа.

Напруження σ_z на поверхнях втулки майже повністю співпадають з напруженнями σ_ϕ (рис.3) тому в роботі не представлені.

Дотичні напруження $\tau_{\rho\phi}$, що розподілені на граничних поверхнях лівої труби, в залежності від радіусу до її внутрішньої поверхні \tilde{R}_1 , представлені на рис.4.

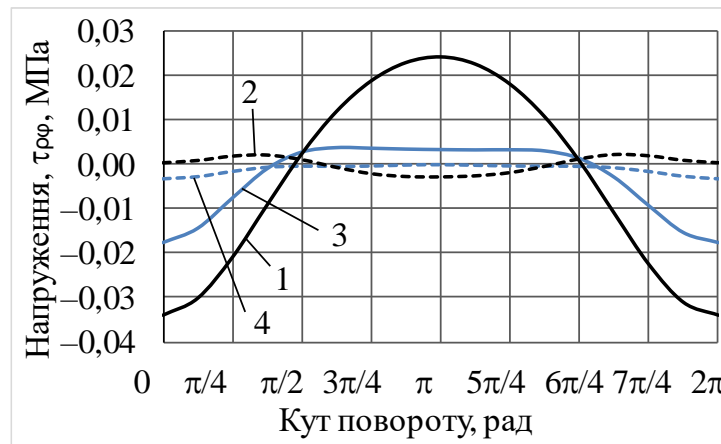


Рис. 4. Напруження $\tau_{\rho\phi}$: 1 – при $\rho = \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 = 5$ мм; 2 – при $\rho = R_l$, $\tilde{R}_1 = 5$ мм; 3 – при $\rho = \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 = 11$ мм; 4 – при $\rho = R_l$, $\tilde{R}_1 = 11$ мм.

Дотичні напруження $\tau_{\rho\phi}$ на спряженні між шаром та трубою, незалежно від внутрішнього радіусу труби \tilde{R}_1 , майже дорівнюють нулю (рис.4, лінії 2, 4).

На внутрішній поверхні труби напруження $\tau_{\rho\phi}$ збільшуються зі зменшенням радіуса \tilde{R}_1 .

Максимальні значення $\tau_{\rho\phi(\max)} = -0,0338$ МПа при $\phi = 0$.

5. Висновки

Створений високоточний метод розрахунку просторової задачі теорії пружності для шару з двома товстостінними циліндричними трубами, які використовуються як опори (на внутрішніх поверхнях труб задані переміщення). Задача розв'язана за допомогою аналітико-чисельного узагальненого методу Фур'є. Чисельний результат задачі можна отримати з наперед заданою точністю, яка залежить від обраного порядку системи рівнянь m .

В порівнянні з попередніми роботами [9 – 18] було поєднано формули та застосовані інші типи граничних умов.

Проведений числовий аналіз напружено-деформованого стану лівої втулки показав, що при збільшенні товщини втулки зростають напруження на її внутрішній поверхні. Це повинно бути враховано при застосуванні матеріалів з низькими фізико-механічними характеристиками.

Запропонований метод може бути застосований для отримання високоточних результатів при розрахунку деталей машин і механізмів, модель яких є шар з двома трубами та заданими на внутрішніх поверхнях труб переміщеннями. Аналіз напруженого стану може бути застосований для прогнозування геометричних параметрів реальних конструкцій.

Подальший розвиток цього напряму потрібний для врахування додаткових концентраторів напружень та інших граничних умов.

Список літератури:

- 1) Бояршинов, С.В. (1973). Основы строительной механики машин / Учеб. для машиностроит. спец. вузов. Москва: «Машиностроение», 456 с.
- 2) Баженов, В.А., Перельмутер, А.В., Шишов, О.В. (2013). Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання. Підручник для студентів вищих навчальних закладів. Київ: ВІПОЛ, 896 с.
- 3) Tekkaya, A.E., Soyarslan, C. (2014). Finite Element Method. Encyclopedia of Production Engineering. Berlin: Springer, 508–514. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699
- 4) Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. Available at: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation>
- 5) Zasovenko, A., Fasoliak, A. (2023). Mathematical modeling of the dynamics of an elastic half-medium with a cylindrical cavity reinforced by a shell under axisymmetric loads. *New Materials and Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering*, 2, 67–73.
- 6) Гузь, А. Н., Кубенко, В. Д., Черевко, М. А. (1978). Дифракция упругих волн. Київ: Наук. Думка, 307 с.
- 7) Гринченко, В. Т., Мелешко, В. В. (1981). Гармонические колебания и волны в упругих телах. Київ: Наук. Думка, 284 с.
- 8) Николаев, А. Г., Проценко, В. С. (2011). Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 344 с.
- 9) Nikolaev A. G., Tanchik E. A. (2015). The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*, 8, 148–158.
- 10) Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. (2016). Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 57, 1141–1149.
- 11) Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. (2016). Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. *Mechanics of Composite Materials*, 52, 177–188.
- 12) Ukrayinets, N., Murahovska, O., Prokhorova, O. (2021). Solving a One Mixed Problem in Elasticity Theory for Half-space With a Cylindrical Cavity by the Generalized Fourier Method. *East.-Eur. J. Enterp. Technol.* vol. 2, pp. 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.

13) Miroshnikov, V. Y. (2020). Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation. *International Applied Mechanics*, 56(3), 372–381.

14) Miroshnikov, V., Savin, O., Sobol, V., Nikichanov, V. (2023). Solving the Problem of Elasticity for a Layer with N Cylindrical Embedded Supports. *Computation*, 11, 172. <https://doi.org/10.3390/computation11090172>

15) Denshchykov, O., & Miroshnikov, V. (2024). Analysis of the stress state of a layer supported by two cylindrical swivel joints. *International Science Journal of Engineering & Agriculture*, 3(1), 50–60. <https://doi.org/10.46299/j.isjea.20240301.06>

16) Miroshnikov, V. Yu., Medvedeva, A. V., Oleshkevich, S. V. (2019). Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. In: *International Conference on Actual Problems of Engineering Mechanics, Materials Science Forum 968*, 413-420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413>

17) Miroshnikov, V., Savin, O., Younis, B., Nikichanov, V. (2022). Solution of the problem of the theory of elasticity and analysis of the stress state of a fibrous composite layer under the action of transverse compressive forces. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4 (7 (118)), 23–30. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.263460>

18) Vitaly, M. (2023). Rotation of the Layer with the Cylindrical Pipe Around the Rigid Cylinder. In: , et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering . CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham, 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32

Analysis of the stress-strain state of bearing layer bushings under static load

Oleksandr Denshchykov

Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KhAI", Kharkiv, Ukraine
ORCID: 0009-0008-2385-5841

Iaroslav Grebeniuk

Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KhAI", Kharkiv, Ukraine
ORCID: 0009-0004-6032-7125

Oleksandr Savin

Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KhAI", Kharkiv, Ukraine
ORCID: 0000-0002-1577-6990

Vitaly Miroshnikov

Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KhAI", Kharkiv, Ukraine
ORCID: 0000-0002-9491-0181

Abstract: The method is proposed for solving the spatial problem of elasticity theory for a layer on embedded cylindrical supports with bushings. The bushings are considered to be thick-walled tubes. Stresses are given on the flat surfaces of the layer, and displacements are given on the inner surfaces of the tubes. The connection conditions between the layer and the tubes are specified in the form of a rigid connection. The materials of the layer and the tubes are elastic, homogeneous, with different physical and mechanical properties. The layer and the tubes are considered in different local coordinate systems (Cartesian and cylindrical). The Lamé equation is used to solve the problem. The combination of basic solutions of the Lamé equation in different coordinate systems is carried out using the analytical-numerical generalized Fourier method. Satisfying the boundary conditions and conjugation conditions, a system of linear algebraic equations of the second kind is created, to which the reduction method is applied. Numerical analysis showed high convergence of the results to the exact ones (the accuracy of fulfilling the boundary conditions was 10^{-5} at the order of the system of

equations $m = 4$ for values from 0 to 1). The analysis of the stressed state was carried out for a plastic bushing of different thicknesses and a layer made of aluminum alloy D16T. The results obtained show that with a decrease in the inner radius of the bushing, the stresses on its surface increase significantly, which should be taken into account when using materials with low physical and mechanical characteristics. The proposed method can be used to obtain high-precision results when designing connections of parts of machines and mechanisms, the model of which is a layer on embedded cylindrical supports with bushings. The numerical results obtained can be used to predict geometric parameters during design.

Keywords: Layer with cylindrical inclusions, fibrous composite, generalized Fourier method.
