

---

## **Аналіз напруженого стану шару на двох циліндричних врізаних опорах з підшипниками ковзання**

**Михайло Леонідович Косенко**

кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет  
ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, Україна  
ORCID: 0009-0002-2005-2222

**Олексій Олександрович Ільїн**

кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет  
ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, Україна  
ORCID: 0009-0005-7852-9873

**Сергій Юрійович Свердлов**

кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет  
ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, Україна  
ORCID: 0009-0001-8220-8731

**Олександр Борисович Савін**

кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет  
ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, Україна  
ORCID: 0000-0002-2664-0255

### **Для цитування цієї статті:**

Косенко Михайло Леонідович, Ільїн Олексій Олександрович, Свердлов Сергій Юрійович, Савін Олександр Борисович. Аналіз напруженого стану шару на двох циліндричних врізаних опорах з підшипниками ковзання. International Science Journal of Engineering & Agriculture. Vol. 4, No. 2, 2025, pp.171-183. doi: 10.46299/j.isjea.20250402.11.

**Надійшла до редакції:** 05 лютого 2025 р.; **Схвалено:** 05 березня 2025 р.;

**Опубліковано:** 01 квітня 2025 р.

---

**Анотація:** Циліндричні втулки та підшипники ковзання в машино та авіабудуванні є важливими конструктивними елементами, що виконують різноманітні функції, забезпечуючи надійність, довговічність і безпеку конструкцій. В роботі проведений аналіз напруженого стану деталі на двох врізаних опорах. Між опорами та тілом деталі використовуються підшипники ковзання. Модель зведена до шару з двома врізаними товстостінними циліндричними трубами. Між шаром та трубами, а також на внутрішніх поверхнях труб задані умови гладкого контактного (що моделює підшипник ковзання), на плоских поверхнях шару задані напруження. Просторова задача теорії пружності базується на рівняннях Ламе. Шар розглядається у декартовій системі координат, труби у локальних циліндричних. Під час виконання граничних умов створюється нескінчена система інтегро-алгебраїчних рівнянь. До створеної системи рівнянь застосовується формули перерозподілу базисних розв'язків аналітико-числового узагальненого методу Фур'є. В результаті математичних перетворень отримана нескінчена система лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої застосований метод редукції. Після визначення невідомих отриманий напружено-деформований стан. Числовий аналіз напруженого стану проведений для шару з авіаційного сплаву Д16Т та поліамідних втулок ковзання. Отриманий результат порівняний з роботою, де труби жорстко з'єднані з опорою. Числовий аналіз дозволяє стверджувати, що наявність умов контактного типу

перерозподіляє напружений стан, збільшуючи максимальні напруження. Запропонований підхід розв'язання задачі може бути застосований до конструкцій, розрахункова схема яких співпадає з постановкою поданої задачі.

**Ключові слова:** шар з циліндричними порожнинами, узагальнений метод Фур'є, шар з циліндричними вклученнями, підшипники ковзання.

---

## 1. Вступ

Втулки та підшипники ковзання встановлюються в місцях контакту рухомих або фіксованих деталей для зниження зносу основних елементів конструкції, таких як шарніри або з'єднання. Вони широко застосовуються у вузлах, де потрібне обертання або хитання (наприклад, в елементах управління літаком), оскільки забезпечують плавний рух і значно зменшують тертя. Завдяки цьому конструкції стають більш довговічними, а робота механізмів — ефективнішою та безпечнішою.

В автомобільній та аерокосмічній галузі полімерні підшипники ковзання використовуються у підшипниках сидінь, механізмах склоочисників, педалях, дверних петлях, а також у вузлах підвіски, де потрібна висока надійність і зносостійкість. Вони відіграють важливу роль у зменшенні ваги конструкцій та зниженні потреби в технічному обслуговуванні.

Окрім цього, подібні з'єднання широко застосовуються в залізничному транспорті, сільськогосподарській техніці, харчовій промисловості, медичному обладнанні, а також у верстатобудуванні та багатьох інших напрямках. Наприклад, у залізничному транспорті вони використовуються для забезпечення плавності руху зчленованих елементів вагонів, а в сільськогосподарській техніці — для покращення роботи навісного обладнання та рухомих механізмів. У медичному обладнанні підшипники ковзання сприяють безшумності та надійності роботи різних приладів, що є особливо важливим у чутливих до шуму умовах.

Завдяки унікальним характеристикам матеріалів, з яких виготовляють полімерні втулки та підшипники ковзання, вони забезпечують ефективну роботу механізмів без необхідності додаткового змащування, що робить їх надзвичайно зручними в експлуатації.

Підшипники ковзання виготовляють з різноманітних матеріалів, вибір яких залежить від умов експлуатації, навантажень, швидкості ковзання та інших факторів. Це можуть бути метали та їх сплави, текстоліт, металокераміка, вуглеграфіти або полімери.

Метали та їх сплави часто використовують у виготовленні підшипників завдяки їх високій міцності, зносостійкості та здатності працювати у важких умовах. Наприклад, бронза, латунь, чавун і сталь застосовуються для створення підшипників, що витримують високі навантаження.

Текстоліт є популярним матеріалом завдяки своїй легкості, низькому коефіцієнту тертя та хорошим антифрикційним властивостям. Він використовується у вузлах, де важливе поєднання міцності та зниженого рівня шуму.

Металокерамічні підшипники поєднують у собі властивості металів і кераміки, забезпечуючи високу твердість і термостійкість. Вони добре працюють в умовах підвищених температур та агресивних середовищ.

Вуглеграфітові підшипники застосовують у випадках, коли потрібна висока термостійкість та стійкість до хімічного впливу. Вони добре працюють без мастила, що робить їх придатними для особливих умов експлуатації.

Полімерні матеріали, такі як фторопласт або капролон, забезпечують низький рівень тертя, легкість та корозійну стійкість. Вони широко використовуються в машинах, де важливо зменшити масу конструкції та уникнути необхідності постійного змащування.

Для проектування з'єднань з підшипниками ковзання необхідно мати метод визначення напружено-деформованого стану. Це дозволяє аналізувати та оцінювати поведінку

конструкційних елементів під впливом зовнішніх навантажень, що є критично важливим для забезпечення їх надійності та довговічності. Але циліндричні врізані елементи є концентраторами напружень, які неможливо врахувати звичайними методами. Тому розробка та застосування спеціалізованих підходів до аналізу таких елементів є актуальним завданням сучасної механіки.

Розрахунок напруженого стану у вузлах з різними типами граничних поверхонь є складною задачею, яка часто вирішується чисельними методами, такими як метод скінченних елементів [1]. Цей метод дозволяє виконувати детальний аналіз напружено-деформованого стану навіть у складних геометричних умовах. Однак чисельні методи мають ряд обмежень, пов'язаних із дискретизацією моделі, апроксимацією розв'язків та необхідністю верифікації результатів. Неправильний вибір параметрів сітки або граничних умов може призвести до значних похибок у розрахунках. Тому важливо поєднувати чисельні методи з аналітичними підходами та експериментальними дослідженнями для підвищення точності та надійності результатів.

Аналітичні методи [2 – 5], незважаючи на їхню фундаментальну роль у наукових дослідженнях та інженерній практиці, стикаються з суттєвими обмеженнями при моделюванні та аналізі реальних фізичних систем. Особливо це стосується задач, які передбачають дослідження складних геометричних конфігурацій, таких як просторові тіла з великою кількістю граничних поверхонь, що мають складну форму та взаємне розташування.

Отримання точних аналітичних розв'язків для таких задач є надзвичайно складним завданням, яке часто виявляється практично нездійсненним. Це зумовлено кількома факторами. По-перше, математичний апарат, необхідний для опису та аналізу таких систем, є досить складним і вимагає глибоких знань з різних галузей математики, включаючи диференціальні рівняння, теорію функцій комплексної змінної, варіаційне числення та інші. По-друге, для спрощення математичної моделі та отримання хоча б наближених розв'язків часто доводиться вводити значні спрощення, які можуть суттєво вплинути на точність отриманих результатів. Такі спрощення можуть полягати у ідеалізації геометрії тіла, лінеаризації нелінійних залежностей, знехтуванні деякими фізичними ефектами тощо.

Аналітико-чисельні методи представляють собою компромісний підхід між суто аналітичними та чисто чисельними методами вирішення задач. Ці методи дозволяють досягти більш глибокого розуміння складних фізичних процесів шляхом поєднання строгої математичної теорії з ефективними обчислювальними алгоритмами.

На відміну від чисто аналітичних методів, які часто обмежені простими геометриями та ідеалізованими умовами, аналітико-чисельні методи надають можливість враховувати більшу кількість факторів, таких як складні геометричні форми, неоднорідність матеріалів, нелінійні ефекти та інші. Це робить їх незамінним інструментом для дослідження реальних фізичних систем. Наприклад роботи [6, 7] розв'язують задачі для шару з концентратором напружень, що розташований перпендикулярно до меж шару і не можуть враховувати повздовжні елементи.

Однак, точність результатів, отриманих за допомогою аналітико-чисельних методів, залежить від низки факторів, зокрема, чим більше членів ряду враховується в розрахунках, тим точнішим є результат. Однак, збільшення кількості членів призводить до зростання обчислювальної складності. Вибір того чи іншого типу апроксимації (наприклад, поліноміальна, тригонометрична) також впливає на точність результатів.

При дослідженні задач механіки деформівного твердого тіла, пов'язаних з наявністю поздовжніх концентраторів напружень, особливої актуальності набуває вибір ефективного математичного апарату для аналізу напружено-деформованого стану. Серед існуючих чисельних та аналітико-чисельних методів виділяється узагальнений метод Фур'є [8], який демонструє значну ефективність саме для задач з концентраторами напружень.

Ключовою перевагою узагальненого методу Фур'є є його здатність адекватно описувати складні особливості напруженого стану в області концентратора. Цей метод, заснований на

розкладанні шуканих функцій в ряд Фур'є, дозволяє врахувати особливості розподілу напружень в околі концентратора аналітично, що суттєво підвищує точність розрахунків та зменшує обчислювальну складність задачі.

Основна ідея методу полягає у представленні розв'язку диференціальних рівнянь теорії пружності у вигляді ряду за власними функціями відповідної задачі Штурма-Ліувілля. При цьому, вибір базисних функцій здійснюється з урахуванням геометрії області та типу граничних умов, що дозволяє забезпечити швидко збіжність ряду і точне наближення шуканих функцій.

Застосування узагальненого методу Фур'є в роботах [9–11] дозволило отримати ефективні розв'язки для циліндрів з циліндричними порожнинами і включеннями, в роботах [12–14] проведений аналіз напруженого стану для шару з циліндричною порожниною [12], циліндричним повнотілим включенням [13], циліндричною товстостінною трубою [14]. В роботах [15–17] кількість циліндричних неоднорідностей збільшена, так в роботі [15] розв'язана задача для шару з двома циліндричними врізаними опорами. Роботи [16, 17] присвячені шару з двома циліндричними порожнинами та повнотілим включенням. Аналіз напруженого стану для шару з двома циліндричними врізаними опорами та циліндричними втулками, при заданих на внутрішніх поверхнях втулок переміщеннями, був проведений у роботі [18].

Але, для адекватного моделювання поведінки систем з підшипниками ковзання, необхідно на внутрішніх та зовнішніх поверхнях труб задати умови контактного типу (нормальні переміщення та дотичні напруження).

Таким чином, узагальнений метод Фур'є є потужним інструментом для аналізу задач з поздовжніми концентраторами напружень, який дозволяє отримати точні та надійні результати при відносно невеликих обчислювальних витратах. Його застосування є особливо ефективним при дослідженні таких задач, як розрахунок міцності елементів конструкцій з отворами, тріщинами та іншими дефектами, а також при аналізі контактних задач.

З огляду на поширеність застосування підшипників ковзання у сучасних машинах та механізмах, актуальним є розроблення ефективних чисельних методів для аналізу їхньої роботи в умовах складних навантажень. Зокрема, особливої уваги заслуговує задача визначення напружено-деформованого стану таких елементів з урахуванням контактних взаємодій на внутрішніх поверхнях труб.

Метою цієї роботи є:

- створення методики розрахунку задачі теорії пружності для шару з двома поздовжніми циліндричними товстостінними трубами, внутрішні поверхні яких використовуються як опори;
- врахування умов гладкого контакту на зовнішніх та внутрішніх поверхнях труб;
- проведення аналізу напружено-деформованого стану шару та труб;
- для верифікації розробленої методики проведення порівняльного аналізу отриманих чисельних результатів з даними, наведеними у роботі [18]. Вказана робота є найближчою до теми, яка розглядається. Порівняння результатів дозволить оцінити точність та ефективність запропонованої методики, а також виявити її переваги та недоліки порівняно з існуючими підходами.

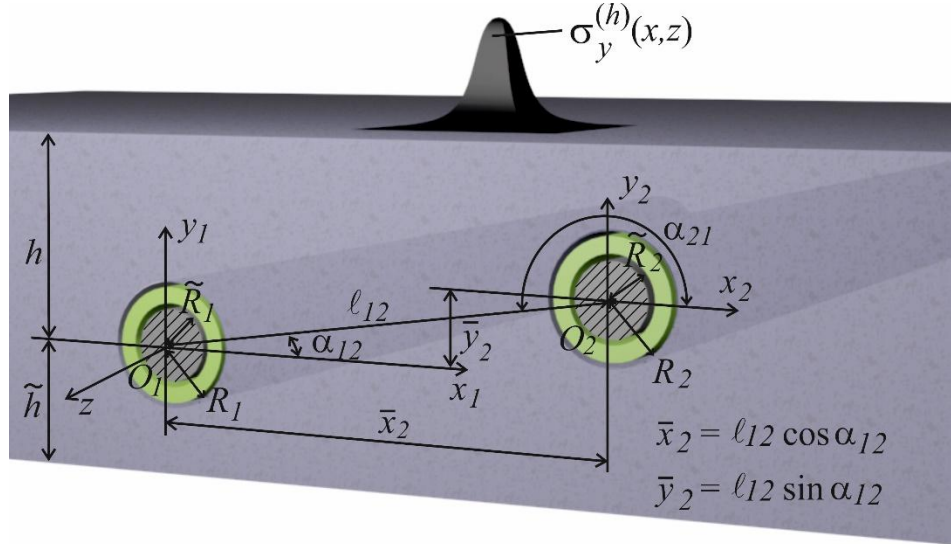
Для досягнення мети необхідно поєднання формул та алгоритмів попередніх робіт а також застосування інших типів граничних умов.

## 2. Постановка задачі

Об'єктом дослідження є композитна система, що складається з пружного шару та двох вкладених у нього товстостінних циліндричних труб (рис.1). Геометрія системи характеризується паралельним розташуванням осей циліндрів та їхніх осей до межових

поверхонь шару. Ця конфігурація дозволяє спростити математичний опис задачі за рахунок використання декартової та циліндричної систем координат.

Кожен із компонентів системи виготовлений із ізотропного та однорідного матеріалу. При цьому матеріали циліндричних оболонок та шару відрізняються своїми механічними характеристиками, такими як модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та межа міцності.



**Рис. 1.** Шар з двома циліндричними товстостінними трубами на двох вірзаних циліндричних опорах.

Шар розглядається в декартовій системі координат  $(x, y, z)$ , а труби - в локальних циліндричних системах координат  $(\rho_p, \phi_p, z)$ , де  $p = 1, 2$ . Початок локальної циліндричної системи координат першої труби  $(\rho_1, \phi_1, z)$  збігається з початком декартової системи, а вісь  $O_z$  цієї системи співпадає з віссю  $O_z$  декартової системи.

Відстань до меж шару  $y = h$  та  $y = -\tilde{h}$ . Радіуси труб: зовнішні  $R_p$  та внутрішні  $\tilde{R}_p$ . Відстань між центрами труб  $\ell_{12}$ , розташовані під кутом  $\alpha_{12}$ .

На плоских поверхнях шару задані напруження  $F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z)$ ,  $F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$ , де

$$\begin{aligned} \vec{F}_h^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z, \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_z. \end{aligned} \tag{1}$$

На внутрішніх поверхнях труб задані умови гладкого контакту (нормальні переміщення та дотичні напруження):

$$\left. \begin{aligned} U_\rho(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= U_0^{(p)}(\phi_p, z), \\ \tau_{\rho\phi}|_{\rho_p=R_p} &= \tau_1^{(p)}(\phi_p, z), \\ \tau_{\rho z}|_{\rho_p=R_p} &= \tau_2^{(p)}(\phi_p, z). \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Відомі функції виразів (1) і (2) вважаємо швидко спадними до нуля на далеких відстанях від початку координат за координатою  $z$  для поверхонь порожнин та координатами  $x$  і  $z$  для меж шару.

Між шаром та кожною трубою виконуються умови спряження

$$\left. \begin{aligned} U_{0,\rho}(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= U_{p,\rho}(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} \\ \sigma_{0,\rho}(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= \sigma_{p,\rho}(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} \\ \tau_{0,\rho\phi}(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= 0 \\ \tau_{p,\rho\phi}(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= 0 \\ \tau_{0,\rho z}(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= 0 \\ \tau_{p,\rho z}(\phi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

де  $U_0(\phi_p, z)$  – нормальні переміщення для шару;  $\tau_0$  – дотичні напруження для шару;  $U_p(\phi_p, z)$  – нормальні переміщення для труб;  $\tau_p$  – дотичні напруження для труб.

### 3. Розв'язання задачі

Розв'язок задачі представимо у вигляді [18]:

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda + \\ &+ \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \bar{R}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho_1, \phi_1, z; \lambda) d\lambda, \\ \bar{U}_2 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \bar{R}_{k,m}(\rho_2, \phi_2, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho_2, \phi_2, z; \lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $H_k(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ ,  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ ,  $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$ ,  $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$ ,  $A_{k,m}^{(2)}(\lambda)$ ,  $\tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)$  – 24 невідомі функції ( $k = 1..3$ ), які необхідно знайти з крайових умов (1), (2) і умов спряження (3);  $\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda)$ ,  $\bar{R}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda)$  – відповідно внутрішні та зовнішні базисні розв'язки рівняння Ламе для циліндра;  $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ ,  $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  – розв'язки рівняння Ламе для шару, які представлено у вигляді [8]:

$$\bar{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$\bar{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\phi)};$$

$$\bar{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[ (\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\phi)} \right]; k = 1, 2, 3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\nu - 1) \bar{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(1)} \cdot); N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[ \nabla \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\nu - 1) \left( \nabla - \bar{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(2)} \cdot); \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – модифіковані функції Бесселя.

Для отримання рівнянь (4) та (5) в одній системі координат були застосовані формули переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе [8]:

– від зовнішніх розв'язків для циліндра  $\bar{S}_{k,m}$  до розв'язків для шару  $\bar{u}_k^{(-)}$  (at  $y > 0$ ) та  $\bar{u}_k^{(+)}$  (at  $y < 0$ )

$$\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, k = 1, 3;$$

$$\bar{S}_{2,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left( \left( \pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \bar{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm \right. \\ \left. \pm 4\mu(1 - \sigma) \bar{u}_3^{(\mp)} \right) \cdot \frac{e^{-i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2},$$

де  $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ ,  $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

– від розв'язків шару  $\bar{u}_k^{(+)}$  and  $\bar{u}_k^{(-)}$  до внутрішніх розв'язків циліндру  $\bar{R}_{k,m}$

$$\bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) = e^{i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, (k = 1, 3);$$

$$\bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) = e^{i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left( (m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1 - \sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right],$$

де  $\bar{R}_{k,m} = \bar{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}$ ;  $\bar{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda \rho) + i \cdot I_n(\lambda \rho) \cdot \left( \bar{e}_\phi \frac{n}{\lambda \rho} + \bar{e}_z \right)$ ;

$\bar{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot \left[ (4\nu - 3) \cdot I'_n(\lambda \rho) + \lambda \rho I''_n(\lambda \rho) \right] + \bar{e}_\phi i \cdot m \left( I'_n(\lambda \rho) + \frac{4(\nu - 1)}{\lambda \rho} I_n(\lambda \rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda \rho I'_n(\lambda \rho)$ ;

$$\bar{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[ \bar{e}_\rho \cdot I_n(\lambda \rho) \frac{n}{\lambda \rho} + \bar{e}_\phi \cdot i \cdot I'_n(\lambda \rho) \right];$$

– від розв'язків циліндру з номером  $p$  до розв'язків циліндру з номером  $q$

$$\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\phi_q + \lambda z)}, k = 1, 2, 3;$$

$$\begin{aligned}\bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda); \\ \bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \bar{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda); \\ \bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \bar{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ \tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq}) \right] \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},\end{aligned}$$

де  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$ .

Для визначення 24 невідомих розв'язків (4) та (5) записано 24 нескінченні системи інтеграл-алгебраїчних рівнянь.

Перші 6 рівнянь записані при врахуванні граничних умов на верхній та нижній межах шару (по одному на кожну проєкцію). За для цього застосовано оператор напруження для правої частини функції (4). Отриманий вектор, при  $y = h$ , прирівняний заданому  $\bar{F}_h^0(x, z)$ , а при  $y = -\tilde{h}$  заданому  $\bar{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$ , які попередньо представлені через подвійний інтеграл Фур'є. Базисні розв'язки  $\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda)$  представлені у декартовій системі координат за допомогою формул переходу (6), через базисні розв'язки  $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  при  $y = h$  і  $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$  при  $y = -\tilde{h}$ .

Із цієї системи рівнянь знайдено  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$  через  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Наступні 6 рівнянь записані при врахуванні граничних умов на внутрішніх поверхнях труб (2). За для цього, при  $k = 2$  та  $k = 3$ , застосовано оператор напруження для правої частини функції (5). Для запису рівнянь в одній системі координат були застосовані формули переходу між базисними розв'язками (8). Отримані вектори, при  $\rho_p = R_p$ , прирівняно заданим (2), представленим через ряд та інтеграл Фур'є.

Останні 12 рівнянь записані при врахуванні умов спряження (3). За для цього, при  $k = 2$  та  $k = 3$ , застосовано оператор напруження для правої частини розв'язків (4) і (5) (створені відповідні рівняння: по  $\bar{e}_\rho$  в переміщеннях, по  $\bar{e}_\phi$ ,  $\bar{e}_z$  в напруженнях). Для запису рівнянь в одній системі координат були застосовані формули переходу між базисними розв'язками (7) та (8). Отримані вектори, при  $\rho = R_p$ , прирівняні між собою або нулю, згідно (3).

Після виключення з останніх 18 рівнянь  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$  (які раніше записали через  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ ) та звільнення їх від рядів по  $m$  і інтегралів по  $\lambda$ , отримано 18 нескінчених лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Знайдені невідомі  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$  підставлено у вираз для  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ .

Таким чином було знайдено всі невідомі виразів (4) і (5).

Для чисельних досліджень до нескінченних систем рівнянь застосований метод редукції. Точність виконання граничних умов показали високу збіжність розв'язання цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

#### 4. Чисельні дослідження напруженого стану.

В пружному ізотропному шарі розташовані дві товстостінні циліндричні труби зовнішнім радіусом  $R_1 = R_2 = 16$  мм, внутрішнім  $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 = 11$  мм (рис.1). Шар – алюмінієвий сплав Д16Т,



коефіцієнт Пуассона  $\nu_0 = 0,3$ , модуль пружності  $E_0 = 7,1 \cdot 10^4$  МПа. Труби – поліамід, коефіцієнт Пуассона  $\nu_0 = 0,4$ , модуль пружності  $E_0 = 1,65 \cdot 10^3$  МПа.

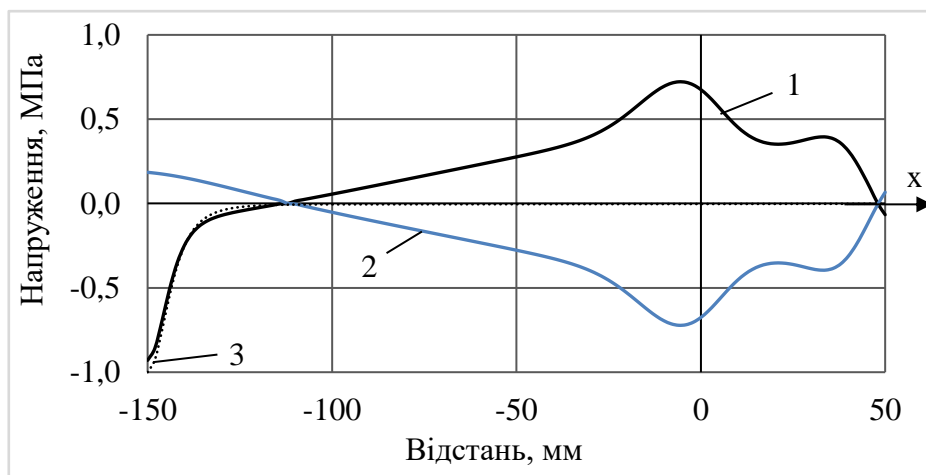
Геометричні параметри моделі:  $h = \tilde{h} = 25$  мм,  $\alpha_{12} = 0$ . Відстань між трубами  $\ell_{12} = 50$  мм.

На верхній межі шару задані нормальні напруження у вигляді одиначної хвилі  $\sigma_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot ((x + \ell_{12} \cdot 3)^2 + 10^2)^{-2}$ , зсунутої ліворуч від центру першої труби на  $\ell_{12} \cdot 3$ , а також нульові дотичні напруження  $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$ . На нижній межі шару задані нульові напруження  $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})}(x, z) = \tau_{yz}^{(\tilde{h})}(x, z) = 0$ . На внутрішніх поверхнях труб задані нормальні нульові переміщення та дотичні напруження  $U_0^{(p)}(\phi_p, z) = \tau_1^{(p)}(\phi_p, z) = \tau_2^{(p)}(\phi_p, z) = 0$ .

Нескінчена система була зрізана до  $m = 4$ . Точність виконання граничних умов за вказаних значень геометричних параметрів  $10^{-4}$ , при значеннях від 0 до 1.

Напружений стан (при заданих умовах контактного типу на внутрішніх поверхнях труб) порівняний з роботою [18], де на внутрішніх поверхнях труб задані переміщення.

Задані на плоских поверхнях шару напруження  $\sigma_y$  та отримані на цих поверхнях напруження  $\sigma_x$  представлені на рис.2.

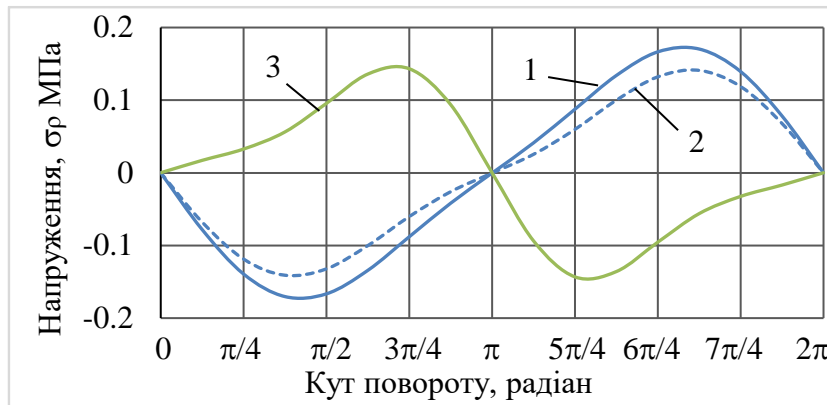


**Рис. 2.** Напруження: 1 –  $\sigma_x$  на верхній межі шару; 2 –  $\sigma_x$  на нижній межі шару; 3 – задані  $\sigma_y$ .

Максимальні задані напруження  $\sigma_y = 1$  МПа знаходяться на відстані  $\ell_{12} \cdot 3 = -150$  мм. Максимальні відповідні напруження  $\sigma_x$  розташовані також на цій відстані і дорівнюють  $\sigma_x = -0,92928$  МПа.

При такому співвідношенні відстані ( $\ell_{12} \cdot 3$ ), на верхній та нижній поверхнях шару біля першої опори ( $x = -6$  мм) виникають напруження  $\sigma_x^{(h)} = -\sigma_x^{(\tilde{h})} = 0,7215$  МПа. Це не перевищує задані напруження  $\sigma_y$ , тому таке співвідношення відстаней (при відповідній висоті шару та радіусам неоднорідностей) є безпечним. Збільшення такого співвідношення призведе до збільшення моменту на першій опорі та додаткового навантаження на підшипник.

На рис.3 представлені напруження  $\sigma_p$  на внутрішніх поверхнях труб при заданих умовах контактного типу на цих поверхнях в порівнянні із заданими переміщеннями [18].

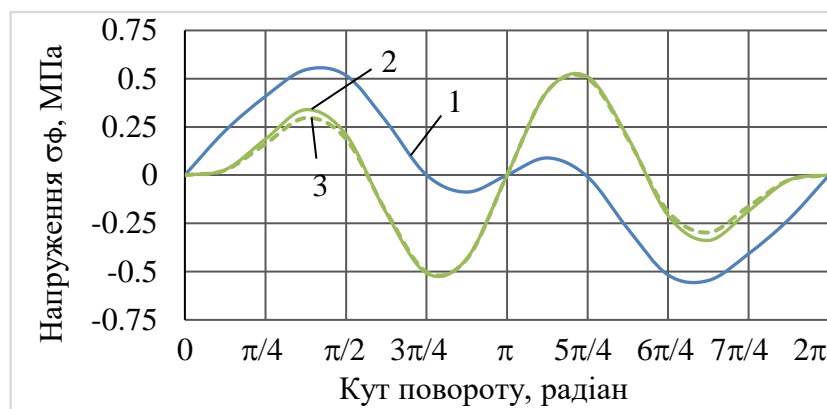


**Рис. 3.** Напруження  $\sigma_\rho$  на внутрішніх поверхнях труб; 1 – на поверхні труби  $p=1$ , при заданих умовах контактного типу; 2 – на поверхні труби  $p=1$ , при заданих переміщеннях; 3 – на поверхні труби  $p=2$ , при заданих умовах контактного типу.

При заданих граничних умовах контактного типу на опорах (рис.3, лінія 1) в порівнянні із заданими переміщеннями (рис.3, лінія 2), напруження  $\sigma_\rho$  на внутрішній поверхні труб зростають. Це є наслідком відсутності моментів на поверхнях опор (дотичні напруження дорівнюють нулю).

На внутрішній поверхні труби  $p=2$  (рис.3, лінія 3) напруження мають зворотній знак і отримують максимальні значення ближче до опори  $p=1$ .

На рис.4 подані напруження  $\sigma_\phi$  в тілі шару на межах спряжень в порівнянні з варіантом, коли замість умов контактного типу задані переміщення [18].

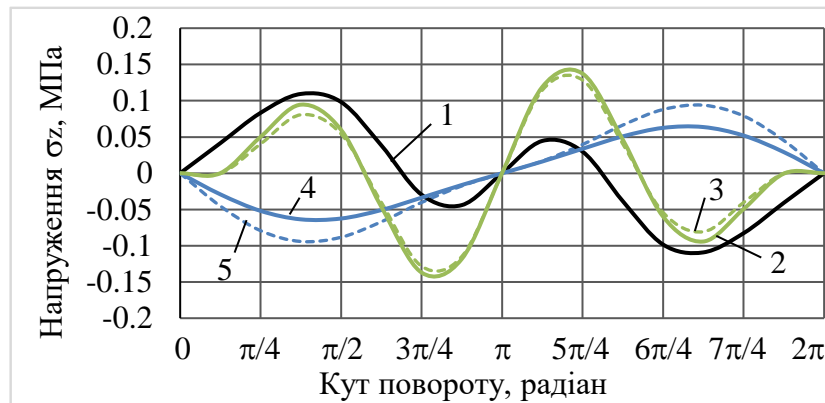


**Рис. 4.** Напруження  $\sigma_\phi$  в тілі шару на межах спряжень; 1 – спряження  $p=1$  при заданих умовах контактного типу; 2 – спряження  $p=2$  при заданих умовах контактного типу; 3 – спряження  $p=2$  при заданих переміщеннях.

Напруження  $\sigma_\phi$  на межах спряжень мало залежить від зміни граничних умов. На першій опорі напруження  $\sigma_\phi$  майже співпадають (рис.4, лінія 1). На другій опорі при заданих умовах контактного типу (рис.4, лінія 2) напруження  $\sigma_\phi$  дещо вищі ніж при заданих переміщеннях (рис.4, лінія 3).

Якщо порівняти напруження  $\sigma_\phi$  на першій (рис.4, лінія 1) і на другій опорах (рис.4, лінія 2), то можна побачити, що максимальні напруження на першій опорі (на межі спряження) вище ніж на другій.

Напруження  $\sigma_z$  подані на рис.5 в порівнянні з варіантом, коли замість умов контактного типу задані переміщення [18].



**Рис. 5.** Напруження  $\sigma_z$ ; 1 – на межі спряження  $p=1$  (в тілі шару); 2 – на межі спряження  $p=2$  (в тілі шару) при заданих умовах контактного типу; 3 – на межі спряження  $p=2$  (в тілі шару) при заданих переміщеннях; 4 – на внутрішній поверхні труби  $p=1$  при заданих умовах контактного типу; 5 – на внутрішній поверхні труби  $p=1$  при заданих переміщеннях.

На межі спряження шару з трубою першої опори (в тілі шару) напруження  $\sigma_z$  (рис.5, лінія 1) майже не залежать від заданих граничних умов на внутрішній поверхні труби. На межі спряження шару з трубою другої опори напруження  $\sigma_z$  збільшуються при заданих умовах контактного типу (рис.5, лінія 2) в порівнянні із заданими переміщеннями (рис.5, лінія 3).

На внутрішній поверхні труби навпаки, напруження  $\sigma_z$  зменшуються при заданих умовах контактного типу (рис.5, лінія 4) в порівнянні із заданими переміщеннями (рис.5, лінія 5).

Максимальні напруження  $\sigma_z$  на межі спряження шару з трубою другої опори (рис.4, лінія 2) є більшими в порівнянні з напруженнями  $\sigma_z$  на межі спряження шару з трубою першої опори (рис.5, лінія 1).

## 5. Висновки

У рамках дослідження запропоновано оригінальну методику розв'язання тривимірної задачі теорії пружності для шару, що взаємодіє з двома врізними циліндричними опорами, оснащеними підшипниками ковзання. Розроблений аналітико-числовий алгоритм базується на узагальненому методі Фур'є, що дозволяє ефективно враховувати складну геометрію системи та різноманітні граничні умови.

Втулки ковзання моделюються як товстостінні циліндричні оболонки, для яких на внутрішній і зовнішній поверхнях формулюються умови контактної взаємодії. Такий підхід забезпечує більш точне відображення реальних фізичних процесів, що відбуваються в зоні контакту.

Проведено детальний числовий аналіз напружено-деформованого стану шару, виготовленого з авіаційного сплаву Д16Т, та поліамідних втулок ковзання. Отримані результати порівняно з розрахунками, в яких на внутрішніх поверхнях труб задавалися переміщення [18]. Порівняльний аналіз дозволяє зробити висновок про значний вплив умов контактного типу на розподіл напружень у системі. Зокрема, встановлено, що наявність контактних взаємодій призводить до перерозподілу напружень та збільшення максимальних значень напружень у деяких критичних областях конструкції. Доведено, що співвідношення відстані між опорами до відстані між опорою та навантаженням  $\ell_{12} \cdot 3$ , при заданій висоті та радіусам неоднорідностей, є безпечним.

Розроблена методика може бути ефективно застосована для розрахунку різних інженерних конструкцій, геометрія та умови навантаження яких відповідають поставленій задачі. Наприклад, результати дослідження можуть бути використані для оптимізації конструкцій валів, роторів, а також інших елементів машин і механізмів, що містять циліндричні опори, циліндричні втулки та підшипники.

Перспективним напрямком подальших досліджень є узагальнення запропонованої методики на випадок конструкцій з більшою кількістю циліндричних неоднорідностей. Такий розвиток моделі дозволить розширити сферу її застосування та більш точно враховувати складну геометрію реальних технічних об'єктів.

---

#### Список літератури:

- 1) Tekkaya, A. E., & Soyarslan, C. (2014). Finite Element Method in CIRP Encyclopedia of Production Engineering. Springer Berlin Heidelberg, 508–514. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7\\_16699](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699)
- 2) Guz' A. N., Kosmodamianskiy A. S., Shevchenko V. P. (1998). Mekhanika kompozitov [Mechanics of composites. Volume 7. Stress concentration]. Kyiv: Nauk. Dumka, 114 – 137.
- 3) Popov G. YA., Vaysfel'd N.D. (2014). Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya beskonechnoy plity s tsilindricheskim vklyucheniym pri uchete yeye udel'nogo vesa [An axisymmetric problem of the theory of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion, taking into account its specific weight]. Prikladnaya mekhanika, 50(6), 27–38.
- 4) Guz' A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. (1978). Difraktsiya uprugikh voln [Diffraction of elastic waves]. Kyiv: Nauk. Dumka, 307.
- 5) Grinchenko V. T., Meleshko V. V. (1981). Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. Kyiv: Nauk. Dumka, 284.
- 6) Fesenko, A., Vaysfel'd, N. (2019). The Wave Field of a Layer with a Cylindrical Cavity. In: Gdoutos, E. (eds) Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Corfu, Greece, June 23-26, 2019. Structural Integrity, 8, 277–282. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2\\_51](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51).
- 7) Fesenko, A., Vaysfel'd, N. (2021). The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. Procedia Structural Integrity, 33, 509-527.
- 8) Nikolaev, A. H., Protsenko, V. S. (2011). Obobshchennyi metod Fur'ye v prostranstvennykh zadachakh teoryy uprugosti [Generalized Fourier method in spatial problems of the theory of elasticity]. Kharkov: National Aerospace University “KHAI”, Ukraine, 344.
- 9) Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. (2015). The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. Numerical Analysis and Applications. 8, 148–158.
- 10) Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. (2016). Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 57, 1141–1149.
- 11) Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. (2016). Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. Mechanics of Composite Materials. 52, 177–188.
- 12) Miroshnikov, V., Denysova, T., Protsenko, V. (2019). The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. Strength of Materials and Theory of Structures, 103, 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>
- 13) Miroshnikov, V. Y., Medvedeva, A. V., Oleshkevich, S. V. (2019). Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. Materials Science Forum, 2019, 968, 413–420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.968.413>
- 14) Vitaly, M. Rotation of the Layer with the Cylindrical Pipe Around the Rigid Cylinder. (2023). Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 314–322. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1\\_32](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32)

15) Miroshnikov, V. Y., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., Demenko, V. F. (2023). Analysis of the Stress State for a Layer with Two Incut Cylindrical Supports. *Journal of Mechanical Engineering*, 26(1), 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>

16) Miroshnikov V., Denshchykov O., Grebenuk Y., Savin O. (2024). High-precision solution of elasticity problem for a layer on cylindrical cut-in supports with an elastic cylindrical inclusion. *Colloquium-journal*, 11(204), 11–15. DOI: 10.24412/2520-6990-2024-11204-11-15

17) Denshchykov O., Grebeniuk Ia., Savin O., Alyoshechkina T. (2024). Mixed problem of elasticity theory for a layer with two cylindrical cavities and a cylindrical inclusion. *Colloquium-journal*, 15(208), 16–21. DOI: 10.24412/2520-6990-2024-15208-16-21

18) Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Kosenko M. L., Ilyin O. O. (2024). Analiz napruzhenogo stanu sharu z dvoma tsylindrychnymy vrizanyymi oporamy ta tsylindrychnymy vtulkamy. *Vidkryti informatsiyi ta komp'yuterni intehrovani tekhnolohiyi*. 101. 112-126. <https://doi.org/10.32620/oikit.2024.101.08>

---

## **Analysis of the stress state of a layer on two cylindrical embedded supports with plain bearings**

**Mykhailo Kosenko**

Department of Aircraft Strength, National Aerospace University “KhAI”, Kharkiv, Ukraine  
ORCID 0009-0002-2005-2222

**Olexii Ilin**

Department of Aircraft Strength, National Aerospace University “KhAI”, Kharkiv, Ukraine  
ORCID 0009-0005-7852-9873

**Serhii Sverdlov**

Department of Aircraft Strength, National Aerospace University “KhAI”, Kharkiv, Ukraine  
ORCID 0009-0001-8220-8731

**Oleksandr Savin**

Department of Aircraft Strength, National Aerospace University “KhAI”, Kharkiv, Ukraine  
ORCID 0000-0002-2664-0255

---

**Abstract:** Cylindrical bushings and plain bearings in mechanical and aircraft engineering are important structural elements that perform various functions, ensuring the reliability, durability, and safety of structures. This paper analyzes the stress state of a part on two embedded supports. Sliding bearings are used between the supports and the body of the part. The model is reduced to a layer with two embedded thick-walled cylindrical tubes. Smooth contact conditions are set between the layer and the pipes, as well as on the inner surfaces of the pipes (modeling a sliding bearing), and stresses are set on the flat surfaces of the layer. The spatial problem of elasticity is based on the Lamé equations. The layer is considered in the Cartesian coordinate system, the pipes in the local cylindrical coordinate system. When the boundary conditions are met, an infinite system of integro-algebraic equations is created. The redistribution formulas of the basic solutions of the analytical-numerical generalized Fourier method are applied to the created system of equations. As a result of mathematical transformations, an infinite system of linear algebraic equations is obtained, to which the reduction method is applied. After determining the unknowns, the stress-strain state is obtained. A numerical analysis of the stress state was performed for a layer of D16T aircraft alloy and polyamide sliding bushings. The result is compared with the work where the pipes are rigidly connected to the support. The numerical analysis suggests that the presence of contact-type conditions redistributes the stress state, increasing the maximum stresses. The proposed approach to solving the problem can be applied to structures whose design scheme coincides with the formulation of the problem presented.

**Keywords:** layer with cylindrical cavities, generalized Fourier method, layer with cylindrical inclusions, plain bearings.

---