
Методичні аспекти професійної підготовки майбутніх учителів математики під час вивчення інтегрального числення функції однієї змінної

Наталія Кугай

Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка, м. Глухів, Україна

ORCID:0000-0002-9193-1956

Василина Пауль

Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка, м. Глухів, Україна

ORCID:0009-0005-9058-7988

Ірина Пауль

Білопільський ліцей №2 імені С.М. Гордієнка Білопільської міської ради Сумської області, м. Білопілья, Україна

ORCID:0009-0000-1866-0224

Анотація: У статті теоретично обґрунтовано актуальні методичні аспекти фундаментальної підготовки майбутніх учителів математики в закладах вищої освіти в умовах розбудови профільної старшої школи. Концептуальну основу дослідження вибудовано навколо розв'язання фундаментальної проблеми педагогічної освіти – подолання «подвійної розірваності» Ф. Клейна між вищою математикою та шкільним курсом. Авторами детально розкрито сутність та дидактичний потенціал механізму зворотного трансферу, який забезпечує інтеграцію фундаментальних знань з математики студентів у їхню майбутню професійно-педагогічну діяльність. У роботі представлено результати детального аналізу чинних навчальних програм і сучасних підручників з математики (різних рівнів вивчення). На основі цього аналізу виокремлено основні питання й задачі теми «Інтеграл та його застосування». Обґрунтовано доцільність упровадження під час вивчення інтегрального числення в педагогічних університетах спеціальних задач «з подвійним контекстом». На конкретних математичних прикладах продемонстровано переваги зміщення акцентів на вивчення інваріантності форми невизначеного інтеграла та техніки занесення функції під знак диференціала, що дозволяє раціоналізувати обчислення. Розглянуто методику використання оберненого геометричного прийому (обчислення інтеграла через площу відомих геометричних фігур) та аналізу невластних інтегралів другого роду. Через філософські категорії «форма» та «зміст» розкрито природу типових помилок, пов'язаних із неправомірним застосуванням формули Ньютона-Лейбніца до розривних функцій. Показано, що такий підхід є інструментом профілактики формалізму у знаннях студентів та забезпечує майбутнього вчителя від помилок під час самостійного конструювання дидактичних матеріалів для учнів старших класів.

Ключові слова: підготовка майбутніх учителів математики; математичний аналіз; шкільний курс математики; подвійна розірваність Клейна; зворотний трансфер; задачі з подвійним контекстом; інваріантність форми інтеграла; невластні інтеграли другого роду; форма і зміст.

1. Вступ

Питання наступності та взаємозв'язку між математикою як академічною дисципліною (вищою математикою) та математикою як шкільним предметом є фундаментальним викликом для педагогічної освіти упродовж останнього століття. В основі цього виклику лежить концепція, сформульована видатним німецьким математиком Феліксом Клейном ще у 1908 році, яку він іменував «подвійною розірваністю» (double discontinuity) [1]. Перший розрив виникає в момент переходу випускника школи до університету, де він стикається з абстрактним, аксіоматичним викладом математичного аналізу, що жодним чином не нагадує йому інтуїтивні та алгоритмічні підходи, засвоєні в школі [2]. Другий розрив проявляється, коли молодий фахівець повертається до школи в ролі вчителя: він виявляє, що поглиблені знання з теорії міри, інтегралів Лебега чи топологічних просторів, отримані в університеті, здаються йому абсолютно непридатними для пояснення поняття первісної або обчислення площі криволінійної трапеції учням одинадцятого класу [3]. У результаті вчитель часто відкидає університетський досвід і повертається до тих самих методів викладання, якими навчали його самого, що консервує застарілі підходи та нівелює роль вищої освіти у професійному становленні [4].

Інтегральне числення займає особливе місце в цій структурі розривів. У шкільному курсі математики воно часто подається як сукупність процедурних правил, спрямованих на знаходження первісної та застосування формули Ньютона-Лейбніца. Натомість в університетському курсі математичного аналізу для майбутніх учителів (спеціальність А4.04 «Середня освіта (Математика)») інтеграл – це математичний об'єкт, існування якого потребує доведення через суми Рімана або Дарбу. Дослідження показують, що цей перехід від процедурного (обчислювального) до концептуального розуміння визначеного інтеграла є складним етапом підготовки майбутніх учителів математики [5].

Система вищої педагогічної освіти в Україні на сучасному етапі орієнтована на формування професійних компетентностей, визначених освітньо-професійними програмами (ОПП). ОПП спеціальності А4.04 «Середня освіта (Математика)» передбачають вивчення математичного аналізу як базової дисципліни професійного циклу. Проте аналіз програм [6; 7; 8] свідчить про наявність певних структурних проблем, що підсилюють другу розірваність Клейна. Зокрема, вивчення інтегрального числення в межах курсу математичного аналізу відбувається переважно на першому курсі бакалаврату, тоді як дисципліна «Методика навчання математики» вивчається на старших курсах. Це призводить до того, що на момент вивчення методики викладання елементів інтегрального числення в ЗЗСО теоретичні засади, отримані під час вивчення аналізу, знаходяться у стані «забуття» або сприймаються як занадто абстрактні [2]. Тому актуальною є проблема подолання цього розриву шляхом посилення уваги до тих питань математичного аналізу, які є теоретичним підґрунтям вивчення теми «Інтеграл та його застосування» в шкільному курсі математики, під час вивчення саме математичного аналізу.

2. Об'єкт і предмет дослідження

Об'єктом дослідження є процес підготовки майбутніх учителів математики. Предмет дослідження – методика навчання математичному аналізу в педагогічних ЗВО.

3. Мета дослідження

Мета дослідження – на основі детального аналізу змістового наповнення теми «Інтеграл та його застосування» в ШКМ виокремити ті теоретичні питання і відповідні задачі ШКМ, на яких необхідно зробити акцент викладачам математичного аналізу під час підготовки майбутніх учителів математики; навести приклади задач «з подвійним контекстом», які можна розв'язувати як на елементарному рівні, так і з позицій вищої математики.

4. Аналіз літератури

У світовому науковому просторі проблема навчання інтегрального числення майбутніх учителів математики досліджується з різних позицій. Зарубіжні автори (Н. Вассерман, К. Вінслоу, Ф. Буххольц) зосереджуються на концепції «Subject Matter Knowledge» (знання предмета) та його зв'язку з «Pedagogical Content Knowledge» (педагогічне знання змісту). [9]. Вони підкреслюють, що вивчення аналізу в університеті має бути «дидактично трансформованим», щоб майбутній учитель розумів не лише як довести теорему, а й чому це знання є важливим для викладання в школі [9; 4].

Вітчизняна наукова думка (роботи класиків-методистів Г. Бевза, З. Слєпкань, В. Бевз, Г. Михаліна, М. Шкіля, а також сучасні дослідження О. Шроль [10], Н. Рудик [11]) зосереджена на системному підході до підготовки вчителя: інтегральне числення розглядається як наскрізна лінія, що об'єднує алгебру, геометрію та фізику. Українські дослідники звертають увагу на необхідність впровадження інноваційних технологій навчання, таких як евристичні методи, проблемне навчання та використання інтерактивних середовищ у профільній школі [10; 11].

Доцільно зауважити, що питання вивчення початків аналізу (похідна, інтеграл) у ЗЗСО дискутується тривалий час стосовно змісту, рівня строгості і доведень, практичних умінь і навичок, прикладних аспектів тощо [12]. У роботі М. Ковтонюк [12] наведена схема фундування поняття «первісна», акцентовано, що на кожному рівні фундування особливу увагу слід звертати на розуміння суті кожного базового поняття. Цю думку поділяють і автори робіт [13; 14]. Аналізуючи основні задачі інтегрального числення у ШКМ [14], можливості застосування технічних засобів (Mathematica, Maple, Maxima, SymPy) для формування й розвитку техніки інтегрування [13], науковці підкреслюють, що для закладів загальної середньої освіти задача відпрацювання стійкої техніки інтегрування під час опанування основ інтегрального числення у якості однієї з основних задач ніколи не розглядалася.

Незважаючи на значний обсяг існуючих напрацювань, з аналізу літератури слідує проблема, яка залишається недостатньо дослідженою в українському контексті. Більшість робіт присвячена або суто методиці викладання інтеграла в ЗЗСО (алгоритмічний аспект), або загальним питанням викладання математичного аналізу в університеті. Проте існує дефіцит досліджень, які б пропонували цілісну методичну систему зворотного трансферу (backward transfer) – процесу, за якого вивчення математичного аналізу в педагогічних університетах безпосередньо впливає на якість і глибину пояснення елементів інтегрального числення вчителем [2].

5. Методи дослідження

Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань використовувалися теоретичні, загальнологічні й емпіричні методи та прийоми дослідження: аналіз і синтез, порівняння, узагальнення, бесіди, опитування, методи традиційного й інтерактивного навчання.

6. Результати дослідження

Тема «Інтеграл та його застосування» вивчається на всіх рівнях вивчення математики в ЗЗСО та є одним з модулів у математичному аналізі в педагогічних закладах вищої освіти. Традиційно вважається, що інтегрування вимагає особливих зусиль для вивчення, адже потребує особливої уваги, абстрактного мислення та розуміння математики на інтуїтивному рівні. Варто зазначити, що на кожному рівні вивчення інтегрального числення підходи до вивчення відрізняються.

У навчальній програмі з математики рівня стандарту передбачено 10 годин на вивчення теми «Інтеграл та його застосування». У результаті вивчення розділу в учнів формується

вміння знаходити первісні за допомогою таблиці первісних та їх властивостей; знаходити первісну, що задовольняє задані початкові умови; обчислювати інтеграл за допомогою таблиці первісних та їх властивостей; знаходити площі криволінійних трапецій [15]. Старшокласникам до вивчення пропонуються теми: первісна та її властивості; визначений інтеграл, його геометричний зміст; обчислення площ плоских фігур [15].

На профільному рівні тема інтегрування вивчається упродовж 30 годин. І перелік навичок учнів уже розширено вміннями формулювати означення первісної і невизначеного інтеграла та їх основні властивості; описувати поняття визначеного інтеграла; формулювати властивості визначеного інтеграла; знаходити первісні та визначений інтеграл за допомогою правил знаходження первісних та перетворень; застосовувати інтеграл до розв'язування прикладних задач [16]. Крім тем, визначених для вивчення в програмі рівня стандарту, на профільному рівні окремими підтемами винесено питання «Невизначений інтеграл та його властивості», «Фізичний зміст визначеного інтеграла», «Формула Ньютона-Лейбніца» та «Обчислення об'ємів тіл обертання» [16].

Для вивчення розглядуваної теми в 11 класі на поглибленому рівні, аналогічно до профільного, відведено 30 годин. Аналізуючи навчальні досягнення учнів, констатуємо вміння формулювати означення первісної і невизначеного інтеграла та їх основні властивості, описувати поняття визначеного інтеграла, формулювати властивості визначеного інтеграла, знаходити первісні та визначений інтеграл за допомогою правил знаходження первісних та перетворень, застосовувати визначений інтеграл до розв'язування геометричних задач. У самій програмі відсутні вимоги щодо методів обчислення невизначеного інтеграла, але в процесі вивчення теми «Невизначений інтеграл та його властивості» формуються вимоги до методів обчислення невизначеного інтеграла, які передбачають впевнене вміння інтегрувати за допомогою таблиці інтегралів, властивостей первісних і невизначеного інтеграла. Вбачається, що здобувачі освіти повинні розуміти невизначений інтеграл як сукупність усіх первісних, застосовувати властивості лінійності та обчислювати невизначений інтеграл від складніших функцій шляхом їхнього перетворення [17].

За підсумками аналізу навчальних програм з математики, можна зробити висновок, що на кожному з рівнів учням пропонується до вивчення означення первісної, її властивостей та таблиці первісних. На профільному рівні таблиці первісних розглядаються як виокремлена тема, натомість у програмі рівня стандарту таблиці первісних розглядаються одразу з її означенням (див. табл.1).

Таблиця 1. Основні питання теми «Невизначений інтеграл та його застосування»

Підтема	Рівень стандарту	Профільний рівень	Поглиблене вивчення математики
Первісна та її властивості	+	+	+
Визначений інтеграл, його геометричний зміст	+	+	+
Обчислення площ плоских фігур	+	+	+
Невизначений інтеграл та його властивості.	-	+	+
Визначений інтеграл, його фізичний зміст	-	+	+
Формула Ньютона-Лейбніца.	+	+	+
Обчислення об'ємів тіл обертання.	-	+	+
Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла.	+	+	+
Використання інтеграла для розв'язування прикладних задач.	+	+	+

Проведемо аналіз типів відповідних практичних завдань і вправ теми «Інтеграл та його застосування» в ШКМ з метою виокремлення тих задач, на яких доцільно зосередити увагу

здобувачів освіти під час вивчення математичного аналізу в педагогічних ЗВО, за підручниками авторського колективу під керівництвом А. Мерзляка (рівень стандарту, профільний рівень, поглиблений рівень) [18; 19; 20]. Типи задач відповідно до рівнів вивчення математики відображено у табл. 2. Зауважимо, що аналогічні види задач (але без розподілу на рівні вивчення) наведено в роботі [14].

Таблиця 2. Основні задачі теми «Невизначений інтеграл та його застосування»

Підтема	Види завдань	Наявність/відсутність завдань		
		Рівні вивчення		
		Стандарт	Профільний	Поглиблений
Первісна	З'ясуйте (доведіть, перевірте), чи є функція F первісною функції f на вказаній множині	+	+	+
	Знайдіть загальний вигляд первісної на вказаній множині	+	+	+
	Знайдіть ту первісну, графік якої проходить через задану точку (або задовольняє вказану умову)	+	+	+
	Доведіть, що дві задані функції є первісними однієї функції	-	-	+
	Знайдіть загальний вигляд первісної (але метод, за яким це можна зробити, не вказано в теоретичній частині)	-	-	+
Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл	Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку	+	+	+
	Знайдіть площу криволінійної трапеції, яка обмежена вказаними лініями	+	+	+
	Знайдіть площу фігури, яка обмежена вказаними лініями	+	+	+
	Обчисліть визначений інтеграл	+	+	+
	Завдання з параметрами	+	+	+
	Обчисліть визначений інтеграл, використовуючи геометричний зміст	-	+	+
	Обчисліть визначені інтеграли (але метод, за яким це можна зробити, не вказано в теоретичній частині)	-	+	+
Обчислення об'єму тіла	Знайдіть об'єм тіла обертання	-	+	+

Зауважимо, що для знаходження загального вигляду первісних учні послуговуються таблицею первісних (на всіх рівнях вивчення математики) і двома (на рівні стандарту) або трьома правилами обчислення первісних. Вивчення таких методів інтегрування як заміна змінної або інтегрування частинами у ШКМ не передбачено. Водночас задачі на застосування цих методів наявні в підручниках (наприклад, № 11.29, № 11.30 [19]; (№ 9.19, № 9.20, № 11.39, № 11.40 [20]). Для обчислення визначеного інтеграла як правило застосовують формулу Ньютона-Лейбніца. Переважна більшість задач на застосування визначеного інтеграла – обчисліть площу фігури. Водночас небагато задач (10 завдань для профільного рівня вивчення

математики і 10 таких самих завдань для поглибленого рівня вивчення математики), в яких треба обчислити визначений інтеграл, використовуючи його геометричний зміст.

На основі проведеного порівняльного аналізу змістового наповнення теми «Інтеграл та його застосування» в ШКМ і змістового модуля «Інтегральне числення функції однієї змінної» (математичний аналіз) можна виокремити такі важливі питання, на яких варто зосередити увагу викладачам математичного аналізу в педагогічних ЗВО:

1. Оскільки у ШКМ на всіх рівнях вивчення математики теоретичний матеріал і практичні завдання формулюються як правило через термін «первісна», то і під час вивчення теми «Невизначений інтеграл» в математичному аналізі доцільно розширити масив задач з використанням цього терміна (на сьогодні у формулюванні більшості задач послуговуються «невизначений інтеграл»). Такі задачі наявні у навчальному посібнику «Математичний аналіз у задачах і прикладах» авторського колективу під керівництвом Л. І. Дюженкової [21] або можна використати й відповідні задачі з підручників [18; 19; 20]. Роботу над такими завданнями можна організувати так: викладач пропонує розв'язати задачу «Знайдіть загальний вигляд первісної...» (ШКМ) і пропонує переформулювати її й записати через термін «невизначений інтеграл». Включити доцільно й такі задачі: на дослідження того, чи буде функція F первісною функції f на вказаній множині, обов'язково вказавши такий проміжок, де рівність $F'(x) = f(x)$ формально виконується, але функція (чи обидві) невизначені на цьому проміжку; на знаходження первісної, яка має певні властивості (набуває заданого значення у заданій точці; графік проходить через задану точку; задано один із нулів первісної, знайдіть решту її нулів; задана пряма є дотичною до первісної; на дослідження існування первісної функції на заданому інтервалі, на якому функція має точку розриву; на побудову графіків первісних (доцільно для економії часу застосувати ІКТ); на встановлення вигляду кривої, яка може бути графіком певної первісної.

2. Як зазначалося вище, у ШКМ не передбачено вивчення методу заміни змінної (методу підстановки). Тому доцільно під час вивчення математичного аналізу акцентувати увагу здобувачів на застосуванні третього правила знаходження первісної. Для цього доцільно під час вивчення методу заміни у невизначеному інтегралі розв'язати кілька задач «з подвійним контекстом» і порівняти ці розв'язання. Наведемо приклад.

Приклад 1. Знайдіть інтеграл $\int e^{3x-1} dx$ як сімейство первісних, використовуючи властивість: якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку I , то функція $\frac{1}{k}F(kx + b)$, $k \neq 0$ є первісною функції $f(kx + b)$ на відповідному проміжку. Знайдіть цей самий інтеграл методом заміни.

Методичне завдання для студентів: Порівняйте обидва способи за критеріями раціональності та витрати часу. Який із цих способів (і за яких умов) можна і доцільно застосувати у ШКМ?

Далі доцільно дотримуватися того, щоб здобувачі обчислювали аналогічні інтеграли (зовнішня функція є в таблиці інтегралів, а внутрішня – лінійна) саме шляхом застосування вказаної властивості.

На інваріантності форми невизначеного інтеграла базується метод занесення функції під знак диференціала. Яскравим підтвердженням необхідності формування в майбутнього вчителя знань про інваріантність форми є наявність у вітчизняних підручниках з поглибленим вивченням математики (зокрема, за авторством А. Г. Мерзляка та ін.) задач підвищеної складності, для розв'язування яких треба застосувати метод заміни змінної. Під час вивчення математичного аналізу доцільно акцентувати увагу здобувачів освіти на властивості інваріантності (якщо $\int f(x)dx = F(x) + c$, то $\int f(u)du = F(u) + c$, де $u = g(x)$), розв'язати кілька найпростіших завдань ($\int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + c$, $\int \cos(x^3) d(x^3) = \sin(x^3) + c$),

поступово ускладнюючи завдання ($\int x e^{x^2} dx, \int \sin^3 x \cos x dx$). Наприкінці доцільно запропонувати таку задачу:

Приклад 2. Знайдіть невизначений інтеграл $\int e^{\sin x} \cos x dx$, застосовуючи дві форми запису: введення допоміжної змінної і занесення під знак диференціала.

Методичне завдання для студентів: Порівняйте обидва способи за критеріями раціональності та витрати часу. Який із цих способів (і за яких умов) можна і доцільно застосувати у ШКМ? Застосуйте ваш висновок для розв'язання завдання з ШКМ (№ 9.19 [20]): «Знайдіть $\int x^3 \sin x^4 dx$ ».

3. Серед завдань математичного аналізу у ЗВО, в яких мова йде про зв'язок визначеного інтеграла і площі плоскої області, переважають задачі на застосування визначеного інтеграла для обчислення площі. Така сама ситуація і в ШКМ. Проте поза увагою викладачів часто залишається обернений, надзвичайно важливий методичний прийом – обчислення визначеного інтеграла через площу відомої геометричної фігури. Наш досвід засвідчує, що здобувачі вищої освіти зазвичай намагаються обчислити такі інтеграли виключно аналітично – через громіздкі тригонометричні заміни змінної або формальне застосування властивостей визначеного інтеграла. У цей момент викладачеві математичного аналізу важливо змістити акцент на розвиток геометричної уяви майбутнього вчителя. Наприклад, під час обчислення інтеграла вигляду $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ здобувач має розпізнати під знаком інтеграла рівняння верхнього півкола і знайти такий інтеграл як площу півкруга радіуса R . З цією метою доцільно на занятті з математичного аналізу запропонувати такі задачі.

Приклад 3. Обчисліть інтеграл $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$: а) застосувавши заміну $x = 4 \cos t$; б) побудувавши лінію $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x \in [-4; 4]$ і врахувавши геометричний зміст визначеного інтеграла.

Методичне завдання для студентів: Порівняйте обидва способи за критеріями раціональності та витрати часу. Який із цих способів (і за яких умов) можна і доцільно застосувати у ШКМ?

Приклад 4. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^1 |x| dx$: а) застосувавши поняття модуля і адитивну властивість визначеного інтеграла; б) побудувавши лінію $y = |x|$, $x \in [-2; 1]$ і врахувавши геометричний зміст визначеного інтеграла.

Методичне завдання для студентів: Порівняйте обидва способи за критеріями раціональності та витрати часу. Який із цих способів (і за яких умов) можна і доцільно застосувати у ШКМ?

Такий підхід сприяє формуванню у студента готовності до викладання у профільних класах, де, згідно з аналізом підручників А. Г. Мерзляка [19; 20], завдання на обчислення інтеграла на основі його геометричного змісту розглянуто як інструмент розвитку нестандартного мислення учнів.

4. Особливе місце у системі фундаментальної підготовки майбутнього вчителя математики посідає вивчення невластивих інтегралів, зокрема невластивих інтегралів 2-го роду (від необмежених функцій). Методична цінність цієї теми в педагогічному ЗВО виходить далеко за межі суто обчислювальних навичок, оскільки вона дає унікальну можливість проілюструвати на конкретному математичному матеріалі фундаментальні філософські категорії «форма» та «зміст». Як зазначається у дослідженні Н. Кугай та М. Калініченка, методологічна підготовка майбутнього вчителя передбачає формування системного стилю мислення, здатного бачити за зовнішньою знаковою оболонкою глибинну суть математичних закономірностей [22]. У вищій математиці цей концепт розкривається через протиріччя: за однаковою зовнішньою *формою* запису може ховатися абсолютно різний математичний *зміст*. Студенти звикають до того, що запис $\int_a^b f(x) dx$ стандартно позначає визначений інтеграл (інтеграл Рімана). Проте, якщо функція $f(x)$ необмежена на відрізку $[a; b]$, цей об'єкт докорінно змінює свій зміст і перетворюється на невластивий інтеграл, обчислення якого

вимагає застосування граничного переходу, а сам інтеграл може бути як збіжним, так і розбіжним. Акцентування уваги майбутніх учителів на цьому філософсько-математичному нюансі є важливим для профілактики неправомірного застосування формули Ньютона-Лейбніца. Наш досвід викладання засвідчує, що студенти переважно діють шаблонно, ігноруючи вимогу неперервності підінтегральної функції на проміжку інтегрування. З метою подолання цього формалізму й формування прогностичного мислення майбутніх педагогів в курсі математичного аналізу доцільно розв'язати та обговорити таку задачу-пастку:

Приклад 5. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Помилковий (формальний) спосіб розв'язання: Студенти, орієнтуючись лише на зовнішню форму запису, застосовують формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 + (-1) = -2.$$

Аналіз помилки: Викладач має звернути увагу студентів на протиріччя: підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ є додатною, тому інтеграл цієї функції не може бути від'ємним числом. Причина помилки – ігнорування внутрішнього змісту об'єкта: у точці $x = 0$ функція необмежена, отже, це невласний інтеграл 2-го роду, який насправді є розбіжним:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x^2} dx = \infty.$$

Методичне завдання для студентів: Чому формальний алгоритм привів до хибного результату? Сформулюйте умову застосування формули Ньютона-Лейбніца, яка тут не виконується.

Такий підхід має практичну реалізацію в майбутній професійній діяльності вчителів математики. У ШКМ (особливо на профільному та поглибленому рівнях) учні вивчають інтеграл тільки для неперервних функцій. Проте, не маючи глибоких університетських знань про невласні інтеграли, вчитель ризикує припуститися грубих помилок під час самостійного складання завдань, контрольних робіт чи тестів для учнів. Наприклад, бажаючи перевірити вміння учнів інтегрувати тригонометричні функції, недосвідчений педагог може експромтом запропонувати завдання: Обчисліть $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx$. За формою ця задача видається стандартною – визначений інтеграл, але за змістом вона є некоректною для шкільного курсу математики: в точці $x = \frac{\pi}{2}$ підінтегральна функція необмежена, а інтеграл є розбіжним.

Таким чином, розуміння діалектичного зв'язку форми і змісту у невласних інтегралах 2-го роду є пропедевтикою методичних і математичних помилок майбутніх вчителів, сприяє зростанню його математичної культури і забезпечує формування засад професійної кваліфікації, що убезпечує від трансляції хибних математичних моделей у шкільну практику.

7. Перспективи подальшого розвитку досліджень

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробленням та експериментальною перевіркою цілісного навчально-методичного комплексу задач із подвійним контекстом для інших змістових модулів математичного аналізу у контексті підготовки вчителів до роботи в умовах профільної старшої школи. Пророблена робота може бути використана під час написання посібника-практикума з інтегрального числення для майбутніх учителів математики (або під час підготовки планів практичних занять).

8. Висновки

У дослідженні теоретично обґрунтовано концепцію зворотного трансферу (*backward transfer*) як дієвого механізму подолання «подвійної розірваності» Фелікса Клейна у процесі підготовки майбутніх учителів математики. Показано, що вивчення фундаментальних понять математичного аналізу в ЗВО має здійснюватися не ізольовано, а через призму їхнього

глибокого методологічного зв'язку зі шкільним курсом математики. На основі детального аналізу чинних навчальних програм та сучасних підручників з математики (рівня стандарту, профільного та поглибленого рівнів) виокремлено основні теоретичні питання й задачі теми «Інтеграл та його застосування». Це сприяло визначенню відповідних завдань у курсі математичного аналізу для студентів педагогічних університетів, на яких доцільно акцентувати увагу. Обґрунтовано доцільність упровадження під час вивчення інтегрального числення функції однієї змінної спеціально підібраних задач «з подвійним контекстом».

Список літератури:

- 1) Klein, F. (2016). Elementary mathematics from a higher standpoint: Volume I: Arithmetic, algebra, analysis (G. Schubring, Trans.). Springer. (Original work published 1908).
- 2) Wasserman, N. (2025). Adding diversity to mathematical connections to counter Klein's second discontinuity. *Recherches en didactique des mathématiques*, 45(1), 5–31. <https://doi.org/10.46298/rdm.13675>
- 3) Kilpatrick, J. (2008). A Higher Standpoint. In *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME-11)*.
- 4) Cho, H., & Kwon, O. N. (2017). Understanding future teachers' mathematical knowing to overcome double discontinuities. *Empowering Mathematics Learners*, 75–97. https://doi.org/10.1142/9789813224223_0005
- 5) Rasslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions and images for the concrete integral concept. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 22(2), 89–94.
- 6) Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка. (2026). Робоча програма навчальної дисципліни Математичний аналіз. <https://gnpu.edu.ua/>
- 7) Ізмаїльський державний гуманітарний університет. (2026). Робоча програма навчальної дисципліни Математичний аналіз. https://idgu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/05/2020-ok_13_matematychnyj-analiz.pdf
- 8) Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка. (2026). Робоча програма навчальної дисципліни Математичний аналіз. <https://tnpu.edu.ua/faculty/fizmat/index.php>
- 9) Wasserman, N. H., Buchbinder, O., & Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM – Mathematics Education*, 55, 1–13. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5>
- 10) Шроль, Т. С. (2017). Формування ІКТ-компетентності майбутніх учителів математики (Дис. канд. пед. наук). Інститут вищої освіти НАПН України, Київ.
- 11) Рудик, А. В. (2021). Професійна підготовка майбутніх учителів математики до технологізації освітнього процесу в умовах профільної школи (Дис. канд. пед. наук). Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир.
- 12) Ковтонюк, М. М. (2012). Застосування принципу фундування у процесі вивчення математичних дисциплін. *Збірник наукових праць "Педагогічні науки"*, 1(61), 250–256.
- 13) Дейниченко, Т., Липовий, В., Величко, Г., & Усиченко, О. (2023). Елементи інтегрального числення та його використання в курсі алгебри і початків аналізу. В *Матеріали XXI Всеукраїнської науково-методичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених «Наумовські читання»* (сс. 95–98). Харків.
- 14) Панкратова, Н. М., & Синюкова, О. М. (2023). Щодо теоретичних та практичних аспектів розкриття поняття про інтеграл в курсах математики закладів загальної середньої освіти. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*, (210), 223–229. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2023-1-210-223-229>
- 15) Міністерство освіти і науки України. (2026). Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

16) Міністерство освіти і науки України. (2026). Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

17) Міністерство освіти і науки України. (2026). Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

18) Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2019). Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Гімназія.

19) Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2019). Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Гімназія.

20) Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2019). Математика: алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу: профільний рівень: підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Гімназія.

21) Дюженкова, Л. І., Колесник, Т. В., Ляшенко, М. Я., & Михайленко, В. В. (2002). Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2 ч.: Навчальний посібник. Ч. 1. Вища школа.

22) Кугай, Н. В., & Калініченко, М. М. (2020). Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект: монографія. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14710482>

Methodological aspects of professional training of future mathematics teachers in studying integral calculus of a single variable function

Nataliia Kuhai

Department of Physical and Mathematical Education and Informatics, Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University, Hlukhiv, Ukraine
ORCID: 0000-0002-9193-1956

Vasylina Paul

Oleksandr Dovzhenko Glukhiv National Pedagogical University, Hlukhiv, Ukraine
ORCID: 0009-0005-9058-7988

Iryna Paul

S.M. Gordienko Bilopol Lyceum №2, Bilopol City Council, Sumy Region, Bilopol, Ukraine
ORCID: 0009-0000-1866-0224

Abstract: The article theoretically substantiates the current methodological aspects of the fundamental training of future mathematics teachers in higher education institutions in the context of the development of specialized upper secondary school. The conceptual framework of the study is built around solving a fundamental problem of pedagogical education – overcoming Felix Klein's «double discontinuity» between academic university mathematics and the school curriculum. The authors thoroughly reveal the essence and didactic potential of the backward transfer mechanism, which ensures the integration of students' fundamental knowledge into their future professional and pedagogical activities. The paper presents the results of a comprehensive comparative analysis of current educational programs and modern mathematics textbooks for specialized and advanced levels. Based on this analysis, the key cross-cutting content lines of the topic «Integral and its Applications» are identified, and the levels of requirements for students' mathematical preparation are differentiated. The expediency of introducing a system of special tasks with «double context» into the educational process of pedagogical universities is substantiated. Using specific mathematical examples, the

advantages of shifting emphasis to the study of the form invariance of the indefinite integral and the technique of integration by substitution in the form of bringing a function under the differential sign are demonstrated, which allows rationalizing calculations and overcoming the school algorithmic pattern of linear substitution. Special attention is paid to the methodology of using the inverse geometric technique (calculating an integral through the area of known geometric shapes) and the analysis of improper integrals of the second kind. Through the philosophical categories of «form» and «content», the nature of typical errors associated with the unlawful application of the Newton-Leibniz formula to discontinuous functions is revealed. It is proved that the formation of such mathematical and didactic vigilance is a reliable tool for preventing formalism in students' knowledge and protects the future teacher from scientific and methodological errors when independently designing didactic materials for high school students.

Keywords: training of future mathematics teachers; mathematical analysis; school mathematics course; Klein's double discontinuity; backward transfer; tasks with double context; form invariance of integral; improper integrals of the second kind; form and content.
