International Science Journal of Education & Linguistics
2023; 2(3): 77-87
https://isg-journal.com/isjel/
doi: 10.46299/j.isjel.20230203.08
ISSN: 2720-684X

Розвиток знань і вмінь майбутніх учителів математики про функцію: методологічний аспект

Наталія Кугай
кафедра фізико-математичної освіти та інформатики, Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка, м. Глухів, Україна
ORCID 0000-0002-9193-1956

Микола Калініченко
відділ радіоастрономічної апаратури і методів спостережень, Радіоастрономічний інститут НАН України, м. Харків, Україна

Для цитування цієї статті:
Кугай Наталія, Калініченко Микола. Розвиток знань і вмінь майбутніх учителів математики про функцію: методологічний аспект. International Science Journal of Education & Linguistics. Vol. 2, No. 3, 2023, pp. 77-87. doi: 10.46299/j.isjel.20230203.08.
Надійшла до редакції: 03 травня 2023 р.; **Схвалено:** 10 травня 2023 р.;
Опубліковано: 01 червня 2023 р.

Анотація: У цій статті представлені результати (переважно теоретичні) дослідження, присвяченого вивченню можливості й доцільності формування й розвитку методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики під час вивчення функції у курсі математичного аналізу. Встановлено, що набувають розвитку методологічні знань всіх рівнів (філософського, загальнонаукового, конкретно наукового, технологічного) й відповідних методологічних умінь. Підтверджено, що формування методологічних знань і вмінь доцільно здійснювати систематично, комплексно, безперервно й поетапно.

Ключові слова: математичний аналіз, функція, методологічні вміння, методологічні знання, майбутній вчитель математики.

1. Вступ

Формування методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики є однією з актуальних проблем української методичної науки. Особливої актуальності набуває ця проблема на сьогоднішньому етапі розвитку суспільства, який характеризується підвищенням значущості математичного знання в професійній діяльності людства й посиленням методологічної складової змісту математичної освіти. Зростання потоку математичних і загальнокультурних відомостей, збільшення кількості наук, які застосовують математику як засіб розв'язання поставлених задач і як мову, підвищення значущості математичного знання в професійній діяльності людства – виклик для сучасної вищої освіти, зокрема для підготовки майбутніх учителів математики. Сучасній школі потрібні творчі особистості, здатні самостійно організувати діяльність: виявити мотиви, сформулювати мету, виокремити об'єкт, предмет діяльності, визначити завдання, інтерпретувати отримані результати, сформулювати висновки тощо. Все це обумовлює потребу у фахівцях, які володіють методологічними знаннями і вміннями.

Методологічні знання в курсі математики вищої школи не є зовнішніми відносно предметних, навпаки, вони внутрішньо притаманні сучасним математичним дисциплінам. Математика як наука має великий потенціал для формування методологічних знань різних рівнів: філософського (філософські принципи, закони і категорії), загальнонаукового (загальнонаукові принципи й методи пізнання, узагальнені знання про структуру, головні закономірності розвитку математики), конкретно наукового (фундаментальні наукові поняття, фундаментальні відношення між поняттями, фундаментальні теорії, методи, закони, закономірності розвитку певної галузі математичної науки), технологічного (знання, пов'язані з дослідницькою практикою).

У процесі навчання предметів математичного циклу, зокрема математичному аналізу доцільно особливий акцент робити на тих методологічних знаннях і вміннях, які є професійно значущими для майбутніх учителів математики і сприятимуть правильному розв'язанню методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі. Формування методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики органічно залежать від формування предметних знань і вмінь. Велику роль у цьому процесі відіграє навчання здобувачів математичному аналізу.

Функція, як відомо, є предметом вивчення математичного аналізу і однією з найпоширеніших математичних моделей. Крім того, вивчення змістової лінії «Функції» займає значне місце у шкільному курсі математики [1].

2. Об'єкт і предмет дослідження

Об'єктом дослідження є процес навчання студентів математичного аналізу у закладах вищої освіти. Предмет дослідження – методологічна підготовка майбутніх учителів математики в педагогічних ЗВО під час вивчення функцій у курсі математичного аналізу.

3. Мета дослідження

Мета дослідження – виокремити масив методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики, які можливо й доцільно формувати під час вивчення функції; розкрити шляхи формування цих знань і вмінь.

4. Аналіз літератури

На важливій ролі методології, а відтак і методологічних знань і вмінь, в освітньому процесі наголошували в своїх роботах Brown and Porter [2]; Fischer [3]; Kurnik [4] та інші.

Методологічні знання і вміння майбутніх учителів як складові їх методологічної компетентності розглянуто в роботах М. Опачко [5]; Mata, Dumitru C., Dumitru, Gh., Timofti and Stanciu [6]; Genkal and Chernyakova [7] тощо. Методологічні знання як когнітивний компонент методологічної культури вчителя досліджувалися у роботі О. Лаврентьєвої [8].

Методологічна культура майбутніх учителів, зокрема й математики, є основною метою їх методологічної підготовки [8]. Формування і розвиток методологічної підготовки майбутніх учителів різних предметів розглядалися в роботах В. Кушніра [9], Maiier [10] тощо.

Однак питання формування методологічних знань та вмінь майбутніх учителів математики саме під час вивчення функцій в умовах сьогодення комплексно не досліджувалися.

Загальновідомо, що методологічні знання майбутніх учителів математики структуруються відповідно до загальноприйнятих рівнів методології й мають чотири рівні: філософський, загальнонауковий, конкретно науковий, технологічний. Детально зміст цих знань і відповідних умінь для майбутніх учителів математики розкрито у роботах [11; 12]. Встановлено, що процес формування методологічних знань і вмінь має наскрізний характер, проходить у три етапи (пропедевтичний, навчально-діяльнісний, оцінювально-рефлексивний) та триває протягом усього навчання майбутніх учителів математики [12].

5. Методи дослідження

Для досягнення мети і розв’язання поставлених завдань використовувалися теоретичні, загальнологічні й емпіричні методи та прийоми дослідження: аналіз і синтез, порівняння, узагальнення, бесіди, опитування, методи традиційного й інтерактивного навчання.

6. Результати досліджень

Систематичне вивчення змістової лінії «Функції» у шкільному курсі математики розпочинається з 7 класу. З кожним наступним роком розширюється і клас функцій, і перелік властивостей цих функцій. У профільній школі масив функцій і їхніх властивостей, які мають опанувати старшокласники, різняться у зв’язку з різними рівнями вивчення математики [1]. Відрізняються й методи вивчення функцій та їхніх властивостей. А відтак у першокурсників, як правило, відмічається різний масив знань про функції, їхні властивості, методи дослідження як математичних, так і методологічних. Тому виникає необхідність систематизації й узагальнення методологічних (і математичних) знань і вмінь, засвоєних першокурсниками у процесі вивчення функцій у шкільному курсі математики. Для цього можна використати різні шляхи (детально про це у статті [13]).

Розглянемо один із цих шляхів, а саме – включення методологічних знань окремими питання у канву предметних знань з математичного аналізу. Отже, на одному із занять (пропонуємо це зробити на лекції з математичного аналізу) доцільно повторити найважливіші поняття, факти й відношення, пов’язані з функцією, та методи вивчення властивостей функції. Для подальшого свідомого засвоєння як математичних, так і методологічних знань необхідне свідоме розуміння поняття «функція». Тому треба звернути увагу на суттєві і несуттєві ознаки цього поняття. З’ясувати ці ознаки можна під час бесіди, задаючи студентам такі запитання:

1. Що таке відповідність між множинами A та B? Наведіть приклад.
2. Коли за даною відповідністю елемент $b \in B$ відповідає (не відповідає) елементові $a \in A$?
3. Що називають образом елемента $a \in A$ для заданої відповідності між множинами A та B?
4. Чи важливо, якими є множини A та B для задання відповідності між цими множинами?
5. Чи важливо, яким способом задана відповідність між множинами A та B?
6. Яка відповідність між множинами A та B є функцією, а яка не є? Наведіть приклади.
7. Як у шкільному курсі математики вводиться поняття відповідності?

Після цього за допомогою інтерактивної технології «Мікрофон» доцільно заповнити таблицю 1, розмістивши запропоновані ознаки у відповідні колонки «Суттєві» та «Несуттєві».

Такі завдання сприяють пропедевтиці методологічних знань і вмінь: форма – зміст, існування, єдиний, принцип причинності (функціональний зв'язок), конкретизація (відповідність $\to$ функція), фундаментальні поняття та відношення між ними, відділяти істотне від несуттєвого, аналіз, порівняння тощо.

Таблиця 1. Ознаки понять «відповідність» та «функція»

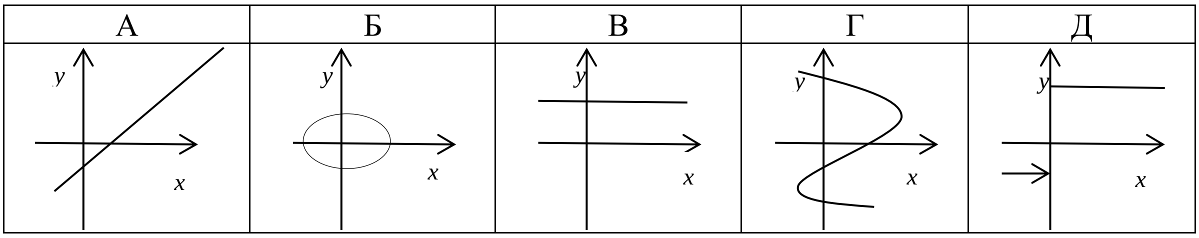
	Суттєві	Несуттєві
Відповідність	Наявність двох непорожніх множин A та B.	Природа елементів множин A та B.
	Наявність множини пар (a; b), $a \in A$, $b \in B$.	Кількість пар (a; b) заданої відповідності.
	Образом кожного елемента $a \in A$ є деяка підмножина B_a усіх таких елементів $b \in B$, кожен з яких відповідає $a \in A$ за даною відповідністю.	Образ B_a кожного елемента $a \in A$ є одноелементною множиною. Для деяких елементів $a \in A$ $B_a = \varnothing$.

Продовження таблиці 1

Функція	Наявність двох непорожніх множин *A* та *B*.	Природа елементів множин *A* та *B*.
	Наявність відповідності між елементами множин *A* та *B*.	Спосіб задання відповідності.
	Однозначність відповідності між елементами множин *A* та *B*.	Різним елементам множини *A* відповідають різні образи з множини *B*.
	Для числової функції множини *A* та *B* – числові.	Для числової функції область визначення і множина значень можуть бути не задані явно.

На практичних заняттях робота може бути продовжена розв’язуванням відповідно дібраних задач (колективно):

1. (Усно). Які криві не можуть слугувати графіком функції дійсної змінної $y = f(x)$? Відповідь обґрунтуйте.



(таке завдання є пропедевтичним для формування вмінь переформулювання умови задачі, застосування знаково-символьних засобів математики, понять зміст – форма, єдиність тощо).

2. Побудуйте графіки функцій $y = x$; $y = \ln e^{x}$. Порівняйте їх.
3. Побудуйте графіки функцій $y = x$; $y = e^{\ln x}$. Порівняйте їх.

Кожну із задач для усвідомленого формування методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики доцільно доповнити запитанням: Проаналізуйте розв’язання задачі і вкажіть, які саме методологічні знання і вміння використані.

Для систематизації і узагальнення знань про види функцій та їх графіки доцільно застосувати технологію «Закінчи речення» (як правило, на практичному занятті). На слайді з’являються речення з пропусками. Після правильної відповіді студентів пропуски заповнюються (рис. 1).

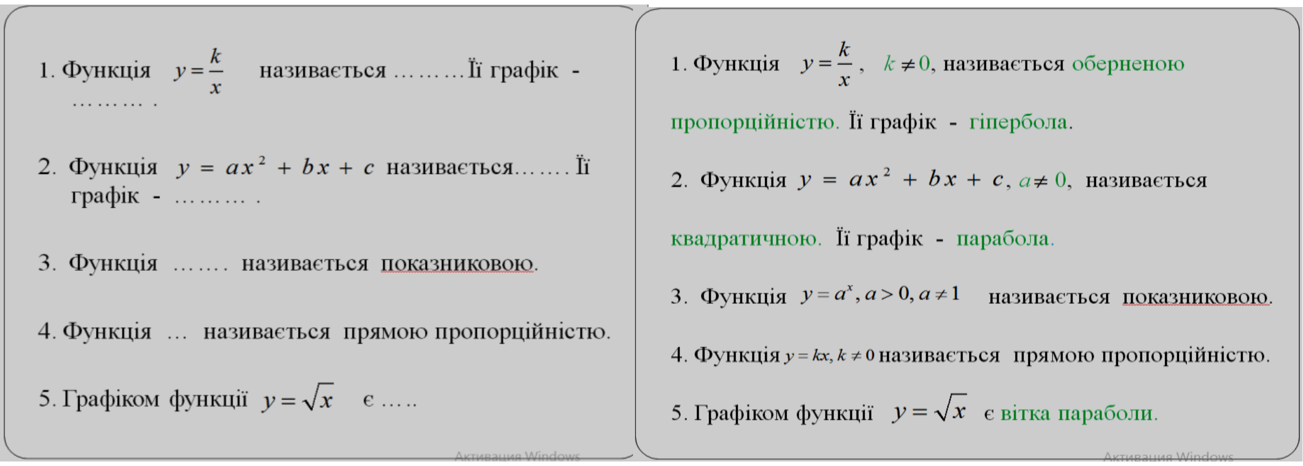


Рис. 1. Фрагмент презентації.

Застосовуючи інтерактивну технологію кооперативно-групового навчання «Обговорення проблеми в загальному колі», варто скласти схему дослідження функції. Після озвучення студентами певної властивості функції відповідний пункт плану дослідження з'являється на екрані. Далі йде обговорення такого питання: що ця властивість означає з точки зору алгебри? геометрії? У результаті маємо на екрані заповнену таблицю 2.

Таблиця 2. Основні властивості аналітично заданої функції $y = f(x)$

№	Властивість	Алгебраїчне тлумачення	Геометричне тлумачення
1	Область визначення $D(f)$	Множина всіх тих значень незалежної змінної *x*, для яких аналітичний вираз $f(x)$ має зміст	Певна множина точок на осі *Ox*
2	Область значень $E(f)$	Множина всіх тих значень залежної змінної *y*, для яких $y = f(x)$, $x \in D(f)$	Певна множина точок на осі *Oy*
3	Парність (непарність)	1. $D(f)$ симетрична відносно нуля 2. $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D(f)$ $(f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D(f))$	Графік функції симетричний відносно осі *Oy* (відносно початку координат)
4	Монотонність	$\forall x_1, x_2 \in A \subset D(f)$ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ – зростаюча на A $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ – неспадна на A $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ – спадна на A $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ – незростаюча на A	Із збільшенням *x* «рух» точки (*x*; $f(x)$) графіком функції відбувається вгору (не вниз), вниз (не вгору)
5	Періодичність	$\exists T \neq 0:\ f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in D(f)$	Графік функції утворюється лише паралельним перенесенням вздовж осі *Ox* його певної частини
6	Нуль функції	Розв'язок рівняння $f(x) = 0$	Абсциса точки перетину графіка функції з віссю *Ox*
7	Інтервал знакосталості	Найширший інтервал $(a;b)$, кожна точка x якого є розв'язком нерівності $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$	Найширший інтервал на осі *Ox*, для якого відповідна частина графіка функції знаходиться над (під) віссю *Ox*
8	Найбільше (найменше) значення	$f(c)$, якщо $f(c) \geq f(x)$ $(f(c) \leq f(x))$, $\forall x \in D(f)$	Ордината «найвищої» («найнижчої») точки на графіку функції

На заняттях з математичного аналізу вводиться властивість обмеженості функції та її обмеженості знизу (зверху); таблиця доповнюється пунктом 9.

9	Обмеженість Обмеженість знизу, зверху;	$\exists c > 0\ \forall x \in D(f):\ \lvert f(x)\rvert < c$ $\exists c \in R\ \forall x \in D(f):\ f(x) > c$ $(f(x) < c)$	Графік лежить між прямими $y = c,\ y = -c$ Графік функції лежить над (під) прямою $y = c$

Робота над таблицями такого типу сприяє формуванню методологічних знань про загальнонаукові терміни (існування, єдиність, форма-зміст) та вмінь (переформулювання задачі, перенесення знань, аналізу, порівняння, використання і перетворення системи знаково-символьних засобів математики, застосування методів дослідження функції тощо).

На практичних заняттях робота із пропедевтики методологічних знань і вмінь може бути продовжена серією практичних завдань (різного рівня складності):

1. Побудуйте графік функції, назвіть відповідні основні властивості за схемою і методологічні знання та вміння, які знадобилися для розв'язання задачі (колективна форма роботи):

а) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}e^x$; в) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; г) $y = \begin{cases} x+2,\ x \le -1, \\ x^2,\ -1 < x \le 1, \\ \sqrt{x},\ x \ge 1. \end{cases}$

Доведіть одну із властивостей (за вибором студента).

Як відомо, функціональний зв'язок є одним із проявів принципу причинності. Математичний аналіз вивчає функцію (це поняття і є предметом вивчення). А тому саме на матеріалі математичного аналізу доцільно формувати вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки. Розпочати відповідну роботу доцільно з найпростіших прикладів, поступово їх ускладнюючи та збільшуючи частку самостійності студентів у розв'язанні поставлених завдань. На нашу думку, доцільно розглядати завдання двох видів: 1) Функцію задано аналітично. Змінюючи для неї область визначення, знайти та/або зобразити її область значень. 2) Задано певну множину. Знайти образ цієї множини для різних функціональних відповідностей. Для цілеспрямованого формування вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки доцільно разом із студентам встановити, які причинно-наслідкові зв'язки існують між: 1) розширенням області визначення функції, заданої аналітично, та її областю значень і графіком; 2) зміною аналітичного задання функції $f : A \to B$ та її областю значень і графіком? Вказати причини та наслідки.

Розглянемо найпростіші приклади.

1. Нехай $f(x) = x^2$. Знайдіть область значень і побудуйте графік цієї функції, якщо: а) $D(f) = N \cap [-3;3]$; б) $D(f) = Z \cap [-3;3]$; в) $D(f) = R \cap [-3;3]$; г) $D(f) = N$; д) $D(f) = R$. Порівняйте області значень. Порівняйте графіки. Зробіть висновок про залежність області значень функції від її області визначення.

2. Нехай $A = [-\pi;\pi],\ f : A \to B.$ Вкажіть множину B і побудуйте графік заданої відповідності, якщо: а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = \sin x$. Порівняйте отримані множини. Порівняйте графіки функцій. Зробіть висновок.

Роботу з розв'язання сформульованих завдань можна організувати, об'єднавши студентів у групи. Кожна з груп отримує відповідну область визначення функції (приклад 1) або функцію (приклад 2). Для перевірки правильно розв'язані завдання можна висвітлити на слайді. Для побудови графіків функцій із прикладу 2 можна застосувати GRAN1 [14] (рис. 2).

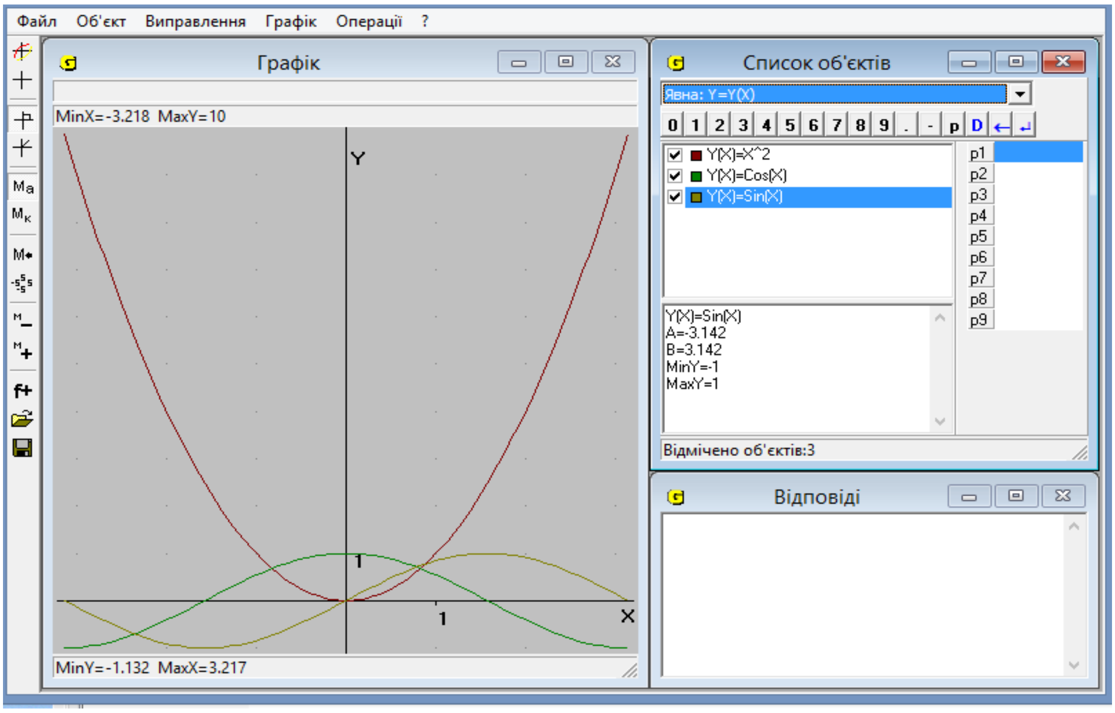


Рис. 2. Ілюстрація причинно-наслідкових зв'язків.

Професійно значущими для майбутнього вчителя математики є вміння застосовувати різні методи дослідження функції однієї дійсної змінної. Як відомо, ці методи можна об'єднати у дві групи: елементарні та із застосуванням похідної. У змістовому модулі «Вступ до аналізу» відбувається узагальнення, розширення і систематизація як сутності поняття «основна елементарна функція», так і елементарних методів дослідження функції.

Для майбутнього вчителя математики вивчення основних елементарних і елементарних функцій, що включає всі необхідні означення, є професійно значущою як в математичному, так і в методологічному плані. Так, поняття степеня a^{α} з раціональним показником $\alpha = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N$ має важливе методологічне значення, оскільки його некоректне означення приводить до парадоксів: $-1 = (-1)^3 = (-1)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-1)^6} = 1$. Тому доцільно підкреслити, що степінь з довільним раціональним показником означається лише для $a > 0$. Коректне означення цього степеня є основою для означення поняття степеня з довільним дійсним показником, степеневої функції з раціональним і дійсним показниками, показникової функції.

Цілеспрямоване формування методологічних знань і вмінь майбутніх вчителів математики яскраво висвітлюється залученням студентів під час лекцій до складання алгоритмів дослідження функцій на монотонність, вгнутість (опуклість), знаходження оберненої функції тощо. У формуванні розглядуваних умінь значну роль слід відвести самостійній роботі: студентам пропонується побудувати графіки основних елементарних функцій (із степеневих варто розглянути $y = x, y = x^{2k}, y = x^{2k+1}, y = x^{-2k}, y = x^{-(2k+1)}, y = x^{\frac{1}{2k}}$, $y = x^{\frac{1}{2k+1}}, k \in N$), лінійної, квадратичної, $y = \sqrt[2k]{x}, y = \sqrt[2k+1]{x}, k \in N$, за заздалегідь складеною схемою (див. табл. 2) описати їхні властивості, з'ясувати, які із них можуть бути доведені на цьому етапі навчання, порівняти властивості функцій $y = x^{\frac{1}{2k}}, k \in N$ та $y = \sqrt[2k]{x}, k \in N$; $y = x^{\frac{1}{2k+1}}, k \in N$ та $y = \sqrt[2k+1]{x}, k \in N$. Як правило, труднощі виникають з доведенням монотонності показникової, логарифмічної та обернених тригонометричних функцій. Тут доцільно вказати, що проблема буде частково розв’язана після вивчення теореми про існування та неперервність оберненої функції.

Навчально-діяльнісний етап припадає на вивчення тем «Застосування похідної до дослідження функції» та «Дослідження функції двох змінних на екстремум», оцінювально-рефлексивний – вивчення функції комплексної змінної та триває протягом всього навчання студентів – майбутніх учителів математики.

Під час вивчення теми «Застосування похідної до дослідження функції» доцільно застосувати проблемне подання матеріалу. Для цього варто запропонувати студентам дослідити на монотонність відомими елементарними методами (а пізніше – на вгнутість, на екстремум, на найбільше і найменше значення) функцію $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-7$. У більшості випадків це завдання викликає значні труднощі, хоч студенти і формулюють алгоритм дослідження функції на монотонність. Після цього слід перейти до вивчення відповідного теоретичного матеріалу, після чого задача досить легко розв’язується.

На практичних заняттях необхідно акцентувати увагу на тому, що: 1) «нові» методи спрощують розв’язування завдань; 2) не на всіх етапах вивчення шкільного курсу математики, не для всіх рівнів вивчення математики ці методи можна застосувати.

У процесі вивчення теоретичного матеріалу слід звернути увагу студентів і привчати їх розрізняти необхідну умову, достатню умову (причинно-наслідковий зв'язок і вміння його встановлювати) та критерій монотонності функції, вгнутості (опуклості) графіка функції, екстремуму функції, точок перегину. З цією метою доцільно після дослідження функції, наприклад, на екстремум, задавати студентам запитання: На якому етапі розв’язування задачі застосували необхідну умову існування точок екстремуму? Достатню умову? Чи може функція досягати екстремуму не в критичній точці? Відповідь обґрунтуйте.

Навчальний матеріал теми «Застосування похідної» має великий потенціал для формування методологічних знань про єдиність і існування та вмінь досліджувати питання, пов’язані з цими категоріями. Доцільно з’ясувати із студентами обґрунтовані відповіді на запитання: Скільки точок екстремуму може мати функція? А екстремумів? У скількох точках функція може набувати найбільшого (найменшого) значення на відрізку? Скільки найбільших (найменших) значень функція може мати? Чи завжди на відрізку функція набуває найбільшого (найменшого) значення?

Як зазначалося вище, оцінювально-рефлексивний етап процесу формування методологічних знань і вмінь про методи дослідження функції припадає на вивчення дисципліни «Комплексний аналіз». Основне означення функції у комплексному аналізі таке саме, як і у математичному аналізі функції дійсної змінної. Але введення понять $\sqrt[n]{z}, Lnz, \operatorname{Arcsin} z$, степеня з комплексним показником тощо вимагає уточнення поняття «многозначна функція». Зробити це можна ввівши поняття ріманової поверхні. Загальновідомо, що Б. Ріману належить ідея узагальнення поняття області, за якого будь-яка аналітична функція $u=f(z)$ комплексної змінної z є однозначною, якщо її розглядати як функцію точки p відповідної узагальненої області R. Така узагальнена поверхня називається рімановою. У загальному випадку ця поверхня є многолистовою. На кожному такому листі функція $u=f(z)$ стає однозначною (виокремлюють її однозначну вітку) і до неї можна застосувати всі поняття і результати теорії однозначної функції комплексної змінної.

Чи не найважливішим для майбутнього вчителя математики у курсі комплексного аналізу є вивчення функцій комплексної змінної, зокрема, їх властивостей. По-перше, варто розглянути питання про графік функції, розпочавши з функції однієї дійсної змінної: графік функції однієї змінної – множина точок простору R^2 (для основних елементарних функції графіки можна побудувати і «прочитати» властивості функції з графіка), графік функції двох дійсних змінних – це множина точок простору R^3 (теж можна хоча би уявити), то вже для функції комплексної змінної графіком є множина точок простору R^4. Але за допомогою комп’ютерних засобів математики для функції комплексної змінної $w = f(z)$ можна побудувати графік функції $|f(z)|$, з якого можна «прочитати» багато властивостей функції $w = f(z)$ (детально про це у роботі [15]). Крім того, у курсі класичного математичного аналізу вивчаються лише однозначні функції; методами комплексного аналізу можна досліджувати функції комплексної змінної як однозначні, так і многозначні (скінченнозначні та нескінченнозначні). Доцільно провести порівняльний аналіз властивостей відповідних функцій дійсної та комплексної змінної, звернувши значну увагу на відмінність властивостей, зокрема: експонента є періодичною функцією, косинус і синус – необмежені, показникова функція може набувати від’ємних значень тощо. Доцільно таке порівняння для однієї із функцій провести колективно (на лекції чи практичному занятті), а решту винести на самостійну роботу студентів. Для порівняння доцільно використати схему дослідження функції (табл. 2) Результати такого порівняння варто занести у таблицю 3.

Таблиця 3. Порівняння властивостей основних елементарних функцій дійсної та комплексної змінної

Дійсна змінна	Комплексна змінна
$w = e^z$	
….	….

Як і для функції дійсної змінної, введення поняття оберненої функції до функції комплексної змінної $w = f(z)$ пов’язане з розв’язанням рівняння $z = f(w)$, де z – відоме, а w – невідоме. Майбутній вчитель математики повинен знати, що рівняння $\sin z = a$, $\cos z = a$ мають розв’язки для будь-яких a (а не тільки для $a \in [-1;1]$), рівняння $a^z = b$ має розв’язки для будь-якого $b \neq 0$ (а не тільки, коли $b > 0$). Ці знання пов’язані з категоріями існування, єдиність.

Зауважимо, що оцінювально-рефлексивний етап формування методологічних знань і вмінь щодо методів дослідження функції продовжується і під час навчання в магістратурі, зокрема під час вивчення дисципліни «Методи оптимізації і варіаційне числення».

7. Перспективи подальшого розвитку досліджень

Проведене дослідження не вичерпує всіх аспектів проблеми. Подальшого дослідження потребують питання розвитку методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики в умовах дистанційного й змішаного навчання.

8. Висновки

Під час вивчення функції як предмета математичного аналізу теоретично обґрунтовується й поглиблюється багато питань шкільного курсу математики. Разом з розвитком математичних знань відбувається розвиток і методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики, оскільки методологічні знання органічно вплетені до канви математичних знань. Формування і розвиток методологічних знань і вмінь передбачає поетапну реалізацію цього процесу: пропедевтичний, навчально-діяльнісний, оцінювально-рефлексивний. Кожен етап має свою мету та відповідний зміст. Формування методологічних знань і вмінь не може відбуватися відособлено від засвоєння предметних знань і формування професійних умінь. Разом з тим засвоєння методологічних знань сприяє систематизації і узагальненню предметних знань про функцію, перенесенню їх у нові умови. Методологічні знання і вміння, сформовані й розвинені під час вивчення функцій виступають засобом для системного засвоєння предметних знань і вмінь.

References:

1) Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. https://mon.gov.ua

2) Brown, R. & Porter, T. (1995). The Methodology of Mathematics. *The Mathematical Gazette*, 79, 485, 321 - 334. DOI: https://doi.org/10.2307/3618304.

3) Fischer, R. (2009). Where is culture in cross cultural research? An outline of a multilevel research process for measuring culture as a shared meaning system. *International Journal of Cross Cultural Management*, 9(1), 25-49. doi: 10.1177/1470595808101154

4) Kurnik, Z. (2008). The scientific approach to teaching math. *Teaching Methodology of Mathematics (Metodika)*, 17, 2, 421-432.

5) Опачко, М. В. (2009). Формування методологічної компетентності майбутнього вчителя фізики у системі професійної підготовки. *Вісник Львівського університету*. Серія педагогічна. Вип. 25. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка. С. 271–278.

6) Mata, L., Dumitru, C., Dumitru, Gh., Timofti, I., & Stanciu, M. (2010). Operational model for the development of methodological competencies at beginning teachers. *Lucrări Ştiinţifice, 53, 2,* 335-338

7) Genkal, S. E., & Chernyakova Zh. Yu. (2016). Methodological competence as the basis of fundamentalization of professional training of future teachers. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, IV (48), 102, 18-22.

8) Лаврентьєва, О.О. (2014). Методика розвитку методологічної культури майбутніх учителів природничих дисциплін у процесі професійної підготовки. *Педагогіка вищої та середньої школи* : зб. наук. праць. Кривий Ріг: КДПУ. Вип. 42. С.33–40

9) Кушнір, В. (2012). Методологічна підготовка вчителя. *Наукові записки [Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка]*, 106, 58-74.

10) Maiier, N.(2017). The methodological training offuture university teachers to implement intercultural foreign language education: the competency-based approach. *Advanced Education, 8,* 4 - 9. https://doi.org/10.20535/2410-8286.101358

11) Кугай, Н. В. (2017). Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків. 336 с.

12) Кугай, Н. В. & Калініченко, М. М. (2020). Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків. 522 с.

13) Кугай. Н. В. (2015). Пропедевтика методологічних знань у першокурсників під час навчання математичних дисциплін. *Оновлення змісту, форм та методів навчання і виховання в закладах освіти. Збірник наукових праць. Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету*. Випуск 12 (55). Частина 2. Рівне-Київ : Міленіум. С. 184-191.

14) https://ktoi.fi.npu.edu.ua/zavantazhyty/category/1-gran1

15) Михалін, Г. О. & Деканов, С. Я. (2010). Вивчення основних елементарних функцій дійсної і комплексної змінної з використанням комп'ютерних засобів математики. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2 : Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*. №. 9. С. 49-71.

Development of knowledge and skills of future mathematics teachers about the function: methodological aspect

Nataliia Kuhai
department of physical and mathematical education and informatics, Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University, Hlukhiv, Ukraine
ORCID 0000-0002-9193-1956

Mykola Kalinichenko
department of radio astronomical equipment and observation methods, Institute of Radio Astronomy National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

Abstract: This article presents the results of a primarily theoretical study focused on the possibility and feasibility of forming and developing methodological knowledge and skills of future mathematics teachers in the study of functions within the course of mathematical analysis. It is established that methodological knowledge at all levels (philosophical, general scientific, specifically scientific, and technological) and corresponding methodological skills can be developed. The study confirms that the formation of methodological knowledge and skills should be carried out systematically, comprehensively, continuously, and in stages.

Keywords: methodological skills, methodological knowledge, mathematical analysis, function, future mathematics teacher.