

---

## Підготовка майбутніх учителів математики: операційне числення як важливий компонент математичної освіти магістрантів

**Наталія Кугай**

кафедра фізико-математичної освіти та інформатики, Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка, м. Глухів, Україна

ORCID 0000-0002-9193-1956

**Микола Калініченко**

відділ радіоастрономічної апаратури і методів спостережень, Радіоастрономічний інститут НАН України, м. Харків, Україна

**Для цитування цієї статті:**

Кугай Наталія, Калініченко Микола. Підготовка майбутніх учителів математики: операційне числення як важливий компонент математичної освіти магістрантів. International Science Journal of Education & Linguistics. Vol. 3, No. 2, 2024, pp. 51-59. doi: 10.46299/j.isjel.20240302.06.

**Надійшла до редакції:** 03 лютого 2024 р.; **Схвалено:** 05 березня 2024 р.;

**Опубліковано:** 01 квітня 2024 р.

---

**Анотація:** У статті обґрунтовано відбір змістового наповнення операційного числення і акцентовано увагу на ролі цієї навчальної дисципліни у підготовці майбутніх учителів математики. Розглянуто можливості застосування цифрових освітніх ресурсів під час навчання операційному численню. Показано необхідність і важливість застосування систем комп'ютерної математики, зокрема Maxima для розв'язування задач операційного числення. Розглянуто застосування GeoGebra як засобу для створення наочності під час вивчення теоретичного матеріалу і розв'язування задач операційного числення. Надано окремі методичні рекомендації.

**Ключові слова:** операційне числення, майбутні вчителі математики, магістратура, GeoGebra, Maxima.

---

### 1. Вступ

Математична освіта є наріжним каменем інтелектуального розвитку суспільства, і рівень підготовки учителів математики суттєво впливає на якість цієї освіти. Одним із визначальних факторів якості вищої освіти, зокрема й математичної, є змістове наповнення освітніх компонент, якими мають опанувати майбутні вчителі математики.

Відповідно до наказу МОН України [1], здобувачам другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика) присвоюється кваліфікація не тільки вчителя математика, а й викладача математики закладів фахової передвищої, вищої освіти різних напрямів підготовки. А така професійна діяльність ґрунтується на високому рівні саме математичної підготовки, на ознайомленні майбутніх викладачів з сучасними галузями математики, до яких відноситься й операційне числення.

Опанування основами операційного числення стане в нагоді й майбутнім учителям математики: операційне числення застосовується для розв'язування багатьох задач різних галузей науки й техніки, що демонструє міждисциплінарний характер математики, роблячи її більш захоплюючою і зрозумілою для учнів; вивчення основ операційного числення сприяє поглибленню знань майбутніх учителів математики про метод математичного моделювання, розширює їхній досвід застосування цього методу до розв'язування задач з різних галузей; удосконалюються й поглиблюються методологічні знання й вміння майбутніх учителів математики [2].

## 2. Об'єкт і предмет дослідження

Об'єктом дослідження є процес підготовки майбутніх учителів математики. Предмет дослідження – методика навчання магістрантів операційному численню в педагогічних ЗВО.

## 3. Мета дослідження

**Метою дослідження** є обґрунтування відбору змістового наповнення операційного числення для майбутніх учителів математики та удосконалення методики навчання здобувачів освіти цьому освітньому компоненту шляхом застосування цифрових освітніх ресурсів, зокрема систем комп'ютерної математики.

## 4. Аналіз літератури

Питанням фахової підготовки майбутніх учителів математики у різні часи приділяли увагу відомі науковці й методисти: І. Акуленко, Г. Бевз, В. Бевз, М. Бурда, Н. Вірченко, О. Матяш, М. Працьовитий, С. Семенець, З. Слєпкань, Н. Тарасенкова, В. Швець, М. Шкіль, О. Шкільний та інші.

На актуальність й необхідність ознайомлення здобувачів вищої освіти з операційним численням наголошується в роботах [3] (для майбутніх учителів технологій), [4] (для майбутніх учителів математики). Авторка роботи [5] розглядає можливість розв'язування задач операційного числення за допомогою он лайн калькулятора Mathforyou.net.

Як правило, проведені дослідження не стосуються відбору змісту і методики навчання операційного числення саме майбутніх учителів математики.

## 5. Методи дослідження

Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань використовувалися теоретичні, загальнологічні й емпіричні методи та прийоми дослідження: аналіз і синтез, порівняння, узагальнення, бесіди, опитування, методи традиційного й інтерактивного навчання.

## 6. Результати досліджень

Операційне (інша назва – символічне) числення як галузь математики виникло у середині XIX століття. Одним із творцем цього числення вважають українського математика Михайла Вашенка-Захарченка, який у 1862 році у своїй дисертації «Символічне числення і застосування його до інтегрування диференціальних рівнянь» вперше систематично виклав теорію операційного числення [6]. Систематичне застосування операційного числення до розв'язування фізико-технічних задач пов'язують з англійським ученим О. Хевісайдом. Детально історію виникнення й розвитку операційного числення викладено зокрема в роботах [7], [8]. Матеріали про історію розвитку операційного числення доцільно використати на першій лекції з цієї дисципліни або запропонувати здобувачам освіти підготувати повідомлення (у вигляді презентацій). Так організована робота може слугувати прикладом для наслідування у майбутній професії і розширить досвід здобувачів з підготовки презентацій.

Перейдемо до обґрунтування відбору змістового наповнення операційного числення для майбутніх учителів математики. Основна ідея відбору змісту й методів – їхня корисність для майбутньої професійної діяльності здобувачів освіти. Як правило, під час навчання основам операційного числення виокремлюють три важливих теми: Перетворення Лапласа. Обернене перетворення Лапласа. Застосування перетворення Лапласа.

Перетворення Лапласа. Зрозуміло, що необхідно ознайомити здобувачів з такими фундаментальними поняттями: функція-оригінал, функція Хевісайда, перетворення Лапласа,

зображення функції-оригіналу. Так, у процесі введення означення функції-оригіналу складаються умови для повторення, узагальнення й систематизації знань студентів про: комплекснозначну функцію, неперервність функції, точки розриву, границю функції в точці і на нескінченності, графік функції (математичний аналіз); удосконалюються вміння побудови графіка функції й «читання» властивостей функції за її графіком. Ці знання й вміння тісно пов'язані зі шкільним курсом математики (ШКМ). Так, у навчальній програмі з математики (поглиблений рівень) [9] наголошується на формуванні «... в учнів умінь встановлювати властивості функції за її графіком, будувати ескізи графіків функцій, заданих аналітичним виразом... Необхідно навчити учнів за графіком функції встановлювати її неперервність, точки розриву...».

Введення поняття перетворення Лапласа сприяє формуванню методологічних знань майбутніх учителів математики – існування того чи іншого математичного об'єкта. І знову таки відбувається повторення, узагальнення й розширення знань здобувачів освіти про невластивий інтеграл і вміння досліджувати його на збіжність.

Серед властивостей перетворення Лапласа доцільно акцентувати увагу на єдиності, лінійності, подібності, запізненні оригіналу, зміщенні зображення, диференціюванні оригіналу й зображення, інтегруванні оригіналу й зображення [8]. Під час вивчення цих властивостей доцільно звернути увагу на їхнє доведення, ще раз нагадавши студентам, що критерієм істинності в математиці, на відміну від багатьох наук, є саме доведення [10]. Крім того, у процесі доведення удосконалюватимуться вміння майбутніх учителів математики застосовувати метод заміни змінної в інтегралі.

Обернене перетворення Лапласа. Вважаємо за доцільне повідомити студентам, що є формула обернення Рімана-Мелліна (1), але її безпосереднє використання викликає значні труднощі:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} F(p) e^{pt} dp, \quad (1)$$

де  $F(p)$  є зображенням для оригіналу  $f(t)$ .

Тому під час знаходження функції-оригіналу за її відомим зображенням увагу слід зосередити на таких методах знаходження оригіналу:

- 1) за таблицею оригіналів і зображень, попередньо перетворивши задане зображення або записавши його через суму елементарних дробів;
- 2) за першою теоремою розвинення (використовуючи ряди Тейлора і Лорана);
- 3) за другою теоремою розвинення (використовуючи формули обчислення лишків комплексної функції).

Під час застосування першого методу удосконалюються знання і вміння майбутніх учителів математики з ШКМ (формули скороченого множення (7 клас), арифметичні дії з раціональними дробами (8 клас), розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (7 клас)), вищої алгебри (розклад на елементарні дроби, рівність многочленів, розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь). Застосування теорем розвинення для знаходження оригіналів – це ще одна нагода і можливість для встановлення і формування міжпредметних зв'язків, зокрема з математичним аналізом (ряд Тейлора), комплексним аналізом (ряд Лорана, лишки функції комплексної змінної).

Застосування перетворення Лапласа. Серед численних застосувань операційного методу [8] пропонуємо розглянути для майбутніх учителів математики застосування цього методу для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами й початковими умовами (задача Коші) й для систем таких рівнянь (можна обмежитися випадком двох рівнянь). У випадку, коли освітньою програмою передбачено вивчення інтегральних рівнянь,

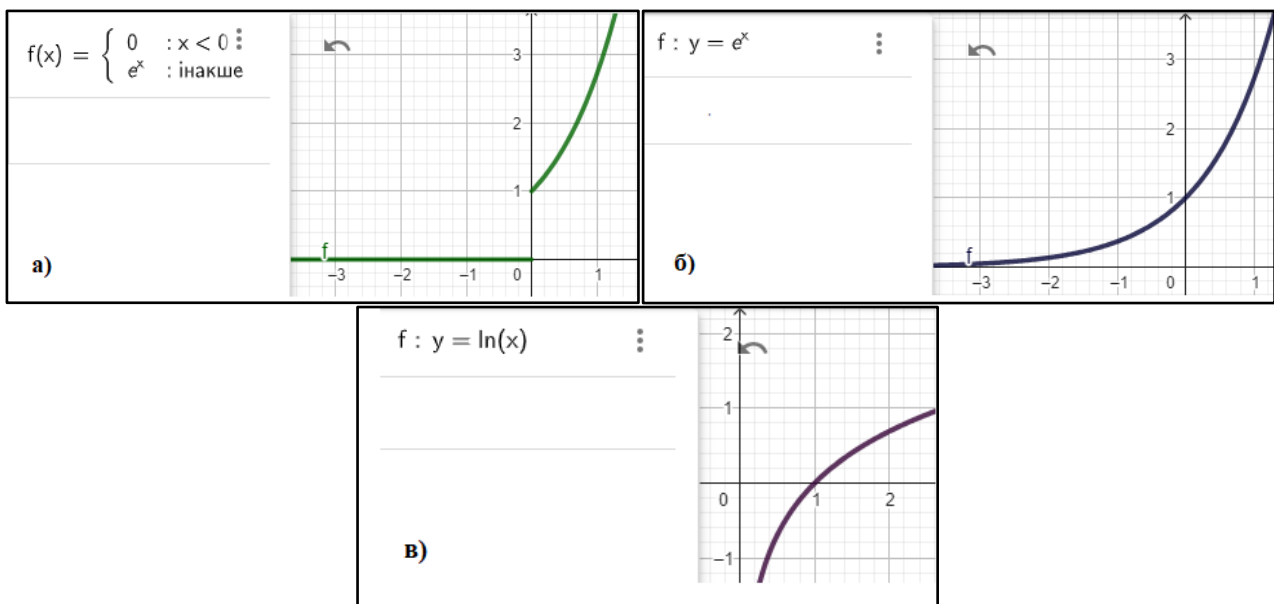
то й для інтегральних рівнянь. Як показує практика, цього достатньо для розуміння значущості методу операційного числення.

У процесі застосування операційного методу для розв'язування описаних задач Коші доцільно обговорити переваги й недоліки цього методу. Так, наприклад, за допомогою операційного методу відразу знаходимо розв'язок задачі Коші (частинний розв'язок), у той час як традиційними методами диференціальних рівнянь треба знайти спочатку загальний розв'язок, а потім частинний з врахуванням початкових умов. Але цей факт можна вважати й недоліком застосування операційного методу: зміна початкових умов призводить до необхідності розв'язувати задачу Коші спочатку. Ще одна проблема, яка може виникнути під час застосування операційного методу, – складність відшукування функції-оригіналу за її зображенням. Підкреслимо, що під час застосування операційного числення відбувається удосконалення математичних умінь майбутніх учителів математики, зокрема й умінь розв'язувати лінійні рівняння та їх системи.

Зауважимо, що операційне числення як навчальний предмет відіграє надзвичайну роль у розвитку методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики [11].

Зрозуміло, що ознайомлення здобувачів освіти з переліченими вище питаннями доцільно провести на найпростіших прикладах. Розглянемо окремі з них.

*Приклад 1.* Для формування вмінь виокремлювати серед функцій функцію-оригінал доцільно запропонувати здобувачам освіти принаймні три рисунки, на яких зображено: графік функції, яка є оригіналом; графік функції, яку можна зробити оригіналом за допомогою функції Хевісайда; графік функції, яка не є оригіналом. Такі рисунки можна зробити, наприклад, в системі комп'ютерної математики GeoGebra [12] (рис 1 а-в).



**Рис. 1.** Графіки функцій, які **а)** є оригіналом, **б)** може бути оригіналом, **в)** не є і не може бути оригіналом.

Після демонстрації таких (або подібних) рисунків доцільно домогтися від студентів обґрунтованих пояснень (Очікувана відповідь: а) виконуються три умови з означення функції-оригіналу, точка  $x = 0$  – точка розриву 1-го роду (типу «скачок»); б) якщо помножити задану функцію на функцію Хевісайда, то матимемо функцію-оригінал; в) для вказаної функції точка  $x = 0$  – точка розриву 2-го роду, тому перша умова з означення функції-оригіналу не виконується). Детальніше про можливу бесіду зі студентами можна прочитати у [13].

*Приклад 2.* Для знаходження зображення функції-оригіналу доцільно розглянути кілька різних способів. Зробити це можна за допомогою методів інтерактивного навчання [13]. Аналогічно можна організувати роботу і під час знаходження оригіналу за відомим

зображенням. Так, наприклад, якщо зображення задано у вигляді дробово-раціональної функції, то можна, об'єднавши здобувачів освіти у групи, запропонувати знайти оригінал: 1 група – розкласти на суму елементарних дробів і скористатися таблицею оригіналів і зображень (у цьому випадку удосконалюються вміння застосовувати методи розкладу на множники, розв'язувати систему лінійних рівнянь, розвиваються вміння встановлювати міжпредметні зв'язки); 2 група – застосувати другу теорему розвинення (удосконалюються вміння обчислювати похідну функції, границю функції в точці, розвиваються вміння встановлювати міжпредметні зв'язки).

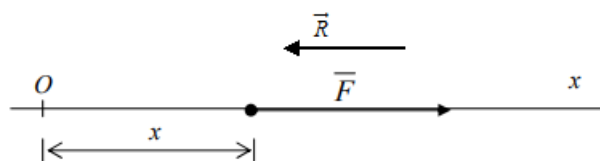
Якість навчання здобувачів вищої освіти залежить не тільки від змістового наповнення навчальних дисциплін, а й, зокрема, від оптимального вибору ресурсів для навчання. Серед них розглянемо системи комп'ютерної математики. Критерієм відбору останніх для застосування під час вивчення операційного числення є корисність цих програм для майбутніх учителів математики в їхній професійній діяльності. Тому пропонуємо для створення наочності, зокрема побудови графіків функцій застосовувати GeoGebra (Графічний калькулятор) [12], а для демонстрації й перевірки розв'язування диференціальних рівнянь операційним методом – пакет Maxima [14]. Досить важливо, що ці програми є у вільному доступі і скористатися ними можна навіть on line. Детально опис програмного пакета Maxima наведено, зокрема, в роботах [15], [16].

Вміння працювати в системі комп'ютерної математики GeoGebra (Графічний калькулятор) стане в нагоді майбутнім учителям математики під час побудови графіків функцій, зокрема тих, які задані різними аналітичними виразами для різних значень незалежної змінної (такі завдання пропонуються учням під час вивчення функцій вже з 7-го класу ЗЗСО), а також для створення завдань за готовими рисунками під час вивчення неперервності функції (11 клас). А програмний пакет Maxima може бути використаний для спрощення раціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних виразів, розв'язування рівнянь і нерівностей ШКМ.

Приклади застосування GeoGebra (Графічний калькулятор) під час вивчення операційного числення наведено вище (Приклад 1). Продемонструємо приклад застосування програмного пакета Maxima.

*Приклад 3.* Як вже зазначалося вище, у змісті операційного числення закладені великі можливості для формування методологічних вмінь застосовувати методи формалізації, абстрагування, ідеалізації, математичного моделювання [11]. Так, під час вивчення теми «Застосування операційного методу до розв'язування диференціальних рівнянь» варто, крім інших, розв'язувати задачі, в яких необхідно побудувати математичну модель – задачу Коші і розв'язати її. Наприклад, «Матеріальна точка масою  $m$  рухається прямолінійно вздовж додатного напрямку осі  $Ox$ , відштовхуючись від початку координат  $O$  з силою  $\vec{F}$ , величина якої  $F = |\vec{F}|$  прямо пропорційна відстані  $x$  точки від початку координат, коефіцієнт пропорційності дорівнює 4. На матеріальну точку діє опір середовища  $\vec{R}$ , величина якого  $R = |\vec{R}| = 3mv$ , де  $v = v(t)$  – величина змінної швидкості точки. У початковий момент часу точка знаходилася на відстані 1 справа від початку координат, а швидкість точки у початковий момент часу дорівнювала нулю. Знайти закон руху матеріальної точки».

Після аналізу задачі доцільно записати її коротко, тут – у вигляді схематичного рисунка:



**Рис. 2.** Короткий запис задачі.

Далі доцільно провести бесіду:

1. Позначимо через  $x = x(t)$  – положення точки на осі  $Ox$  в момент часу  $t$ . Які сили діють на точку? Як вони напрямлені? (За умовою задачі – дві сили: відштовхувальна  $\vec{F}$  і сила опору середовища  $\vec{R}$ , величини яких  $F = 4mx$  і  $R = 3mv$ . Сили протилежно напрямлені, тому результуюча сила, під дією якої відбувається рух матеріальної точки, має величину  $F - R = 4mx - 3mv$ ).

2. На основі якого закону фізики складемо рівняння? (Використовуючи другий закон Ньютона:  $ma = \Phi$ , де  $\Phi = F - R$ ).

3. Що таке  $a$ ? Що таке  $v$ ? Як вони пов'язані з  $x = x(t)$ ? ( $v$  – швидкість,  $v = x'(t)$ ;  $a$  – прискорення,  $a = x''(t)$ ). Це фізичний (механічний) зміст похідної першого та другого порядків).

4. Запишіть відповідне диференціальне рівняння. ( $mx'' = 4mx - 3mx'$  або  $x'' = 4x - 3x' \Leftrightarrow x'' + 3x' - 4x = 0$ ).

5. Скільки розв'язків має це рівняння? (Безліч. Загальний розв'язок залежить від двох довільних сталих  $c_1$  і  $c_2$ ).

6. Як із загального розв'язку виокремити частинний? (Врахувавши початкові умови: оскільки у початковий момент часу відстань матеріальної точки від початку координат дорівнює 1, то  $x(0) = 1$ . Крім того, у початковий момент часу швидкість матеріальної точки дорівнює нулю, тобто  $x'(0) = 0$ ).

7. То яка математична модель задачі? (Отже, математична модель описаного процесу має вигляд: Знайти  $x = x(t)$ ,  $t \geq 0$ , якщо  $x'' + 3x' - 4x = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ).

8. Зрозуміло, що для дослідження цієї математичної моделі, залежно від поставлених цілей навчання, можна застосувати різні шляхи і методи. Ми застосуємо програмний пакет Махіма.

Результат застосування програмного пакета Махіма представлено на рис.3 і рис.4.

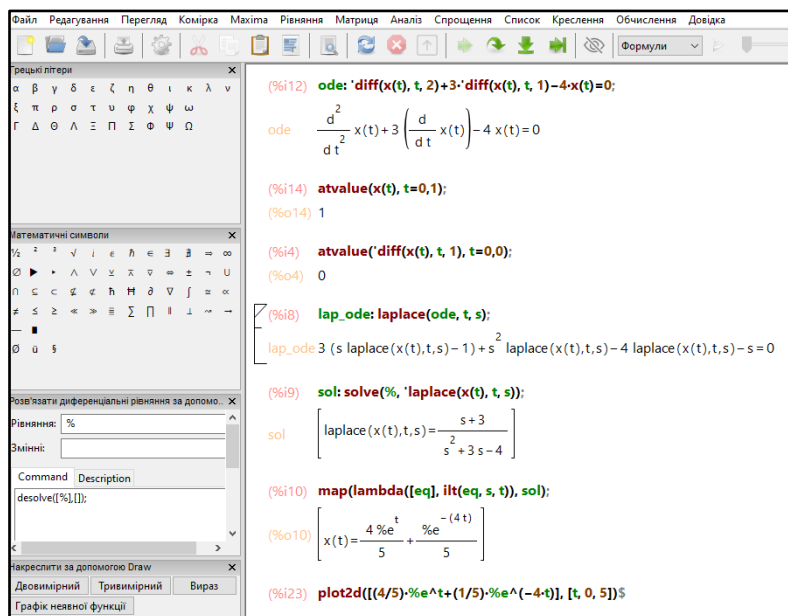


Рис. 3. Розв'язування задачі Коші за допомогою програми Махіма.

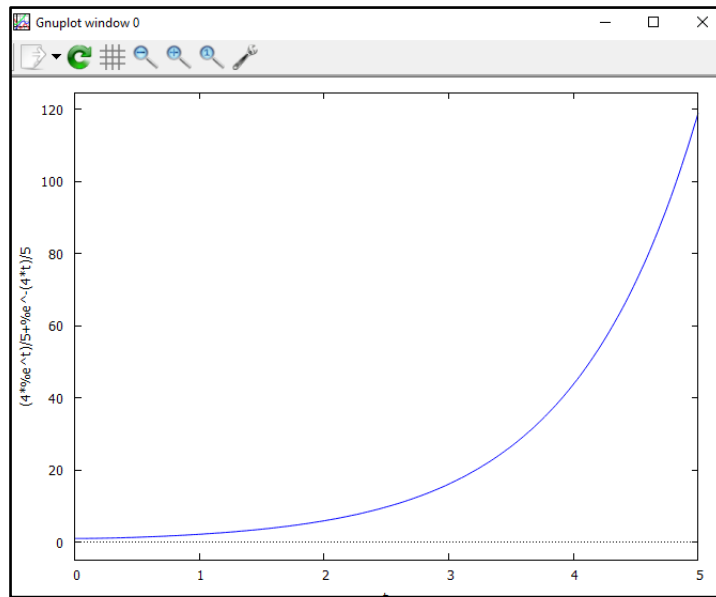


Рис. 4. Побудова розв'язку задачі Коші в програмі Maxima.

У якості домашнього завдання доцільно запропонувати здобувачам освіти розв'язати отриману математичну модель методами диференціальних рівнянь, зробити перевірку. Такі завдання сприяють рефлексії опанованих студентами як методологічних, так і математичних знань і вмінь, виникає реальна потреба відповісти на запитання «Я знаю...», «Я вмію...».

Наприкінці вивчення операційного числення доцільно вказати здобувачам освіти, що побудувати теорію операційного числення можна не тільки на основі інтегрального перетворення Лапласа  $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ . Існують інші інтегральні перетворення для функції  $f(t)$ : інтегральне перетворення Карсона (або інтегральне перетворення Хевісайда)  $\Phi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ ; інтегральне перетворення Мелліна  $F(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} f(t) dt$ ,  $p = \alpha + i\beta$ , де функція  $f(t)$  задовольняє умову  $\int_0^{\infty} |f(t)| t^{\alpha+1} dt < +\infty$  для відповідного вибору  $\alpha$ . Варто зауважити, що всі три інтегральні перетворення пов'язані між собою, кожне із них має свої переваги і недоліки. Вибір оптимального перетворення залежить від конкретної задачі [17].

## 7. Перспективи подальшого розвитку досліджень

Перспективи подальших досліджень – продовжити дослідження з обґрунтування відбору інших цифрових освітніх ресурсів для вивчення майбутніми вчителями математики операційного числення в умовах дистанційного й змішаного навчання.

## 8. Висновки

Таким чином, навчання операційному численню майбутніх учителів математики – це не просто додавання ще однієї теми до їхнього навчального плану; мова йде про те, щоб надати випускникам-магістрам знання й вміння для розширення можливостей наступного покоління учнів. Впроваджуючи набуті знання про операційний метод під час своєї майбутньої фахової діяльності, майбутні учителі математики зможуть подолати розрив між теорією та практичним розв'язанням задач, роблячи математику захоплюючою та актуальною для своїх учнів. Під час вивчення операційного числення відбувається розширення досвіду пізнання студентів, оскільки студенти не тільки застосовують раніше засвоєні знання в нових умовах, а й ознайомлюються з новими методами розв'язання вже відомих задач.



### Список літератури:

1) Деякі питання розміщення державного (регіонального) замовлення, поєднання спеціальностей (предметних спеціальностей), спеціалізацій та присвоєння професійних кваліфікацій педагогічних працівників закладами фахової передвищої, вищої освіти. Наказ МОН України №1006 від 11.11.2022 р. URL : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1669-22#Text> (дата звернення: 28.01.2024).

2) Кугай, Н. В. (2017). Характеристика методологічних знань та вмій з операційного числення. *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності* : зб. наук. праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції (18-19 травня 2017 року, м. Вінниця). Вінниця : ФОП Рогальська О. І. С. 173-175.

3) Корець, О. (2009). Формування професійних компетентностей у майбутніх вчителів технологій у процесі вивчення вищої математики. *Інновації в педагогічній освіті європейського простору*. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. 27-28 вересня 2017 р. Полтава. 390 с.

4) Петрук, В. (2017). До питання фахової підготовки майбутніх учителів математики. *Освіта. Інноватика. Практика*: науковий журнал. № 2(3). С. 60-64.

5) Клапушак, Х. М. (2021). Дослідження задач операційного числення за допомогою онлайн калькулятора Mathforyou.net. *Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи* : матеріали VIII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Тернопіль, 11-12 листопада, 2021). Тернопіль : ТНПУ ім. В. Гнатюка. С.146-149.

6) Матяш, О. І. & Терєпа, А. В. (2018). Математика у творчості. Творчість у математиці: монографія. Вінниця. 283 с.

7) Аветісян, Є. О., Дятлов, Ю. В. & Шепета, О. М. (2017). Застосування операційного числення для розрахунку нескладних схем змінного струму. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі*. Випуск 18. С. 3-8.

8) Войцеховський, О.А (2000). Операційне числення. Навчальний посібник. Вінниця: ВДГУ. 148 с.

9) Навчальна програма з математики. URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 28.01.2024).

10) Раков, С. А. (2005). Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Харків : Факт. 360 с.

11) Кугай, Н. В. & Калініченко, М. М. (2020). Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків. 522 с.

12) <https://www.geogebra.org/graphing> ((дата звернення: 01.02.2024).

13) Кугай, Н. В. (2017). Застосування методів інтерактивного навчання для формування методологічних знань і вмій майбутніх учителів математики. *Вища школа*. № 11. С. 33-41.

14) <http://downloads.sourceforge.net/maxima/maxima-5.13.0.exe>

15) Семеріков, С.О. (2007). *Maxima 5.13: довідник користувача*. Київ. 48 с.

16) Шваліковський, Д.М. (2022). *CAS Maxima: основи роботи*. Луцьк: Вежа-Друк. 106 с.

17) Овчинников, П. П. & Михайленко, В. М. (2004). *Вища математика: підручник*. У 2 ч. Київ : Техніка. Ч. 2. 792 с.



---

## **Training future mathematics teachers: operational calculus as a vital component in the undergraduate mathematics education**

**Nataliia Kuhai**

department of physical and mathematical education and informatics, Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University, Hlukhiv, Ukraine  
ORCID 0000-0002-9193-1956

**Mykola Kalinichenko**

department of radio astronomical equipment and observation methods, Institute of Radio Astronomy National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

---

**Abstract:** This article provides a rationale for the inclusion of operational calculus in the curriculum and underscores its significance in the training of prospective mathematics educators. The paper explores the use of digital educational resources for teaching operational arithmetic. It delves into the necessity and importance of incorporating computer mathematics systems, specifically Maxima, for tackling operational calculus problems. Additionally, the article discusses the application of GeoGebra as a tool to enhance clarity in understanding theoretical concepts and solving operational calculus problems. Methodological recommendations are also presented.

**Keywords:** operational calculus, prospective mathematics teachers, master's degree, GeoGebra, Maxima.

---